

# 电磁推迟相互作用与铁电铁磁介质中非线性现象的起源

梅晓春 俞平

(福州原创物理研究所)

**内容摘要** 本文考虑微观带电粒子间的电磁推迟相互作用,采用简单的偶极子模型,给出铁电、铁磁体极化和磁化过程中,极化和磁化强度与电磁场强度之间的非线性关系。在特殊情况下能还原为非铁电、铁磁体的线性关系,导出经典电磁理论的本构方程。在此基础上与软模理论相结合,能很好地描述交变电磁场中铁电和铁磁介质的极化和磁化滞后回路曲线。证明在高频条件下所得到的电介质极化公式与非线性光学的基本公式一致,表明介质中非线性现象与电磁推迟相互作用密切相关。文中分析指出,虽然真空中麦克斯韦电磁场方程组对时间反演保持不变,但求解方程组必需加上本构方程和欧姆定律,否则不足以确定电磁场。由于在非线性情况下本构方程破坏时间反演对称性,欧姆定律也是破坏时间反演对称性的,由此说明电磁推迟相互作用是宏观物质系统非线性、耗散性和时间反演不可逆性的基本根源。

## 1. 铁电和铁磁介质的唯象理论

实验表明在强场条件下,以及对于铁电和铁磁介质,极化和磁化强度和电磁场强度之间存在复杂的非线性关系。这种非线性关系目前无法从理论上导出,只能从唯象的角度进行假设,或从实验过程中给出经验规律。铁电和铁磁体的极化和磁化过程中存在滞后现象,图 8.1 是铁磁体在低频交变磁场条件下(如频率为 0.1 赫),磁化滞后回线的一般形式。由于铁磁体的  $M$  比  $H$  大得多,  $M \sim H$  曲线与  $B \sim H$  曲线形状相似。当交变电磁场的频率较低时,回线是近矩形的。当外电磁场的频率变大时,磁化回线由近矩形变成连续光滑的椭圆形,且在频率继续变大时由椭圆逐渐变成园形。图 8.3 和 8.4 是镍锌铁氧体在频率为 150 千赫和 500 千赫的外磁场中的磁化滞后回线,可以看出  $B$  与  $H$  的极大值不在同一点。铁电体的滞后回线与铁磁体基本一样,也可用图 8.1、8.3 和 8.4 来描述。

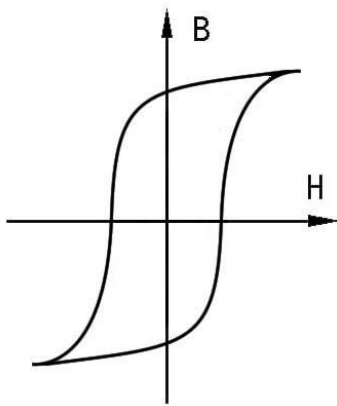


图 8.1 低频交变磁场中的磁化滞后回线

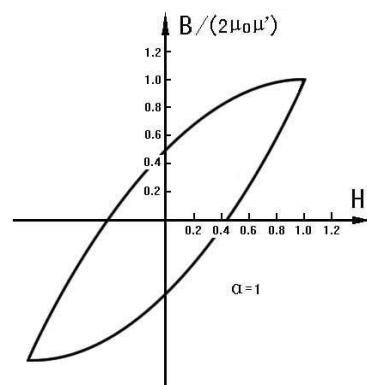


图 8.2 瑞利公式给出的磁化滞后回线

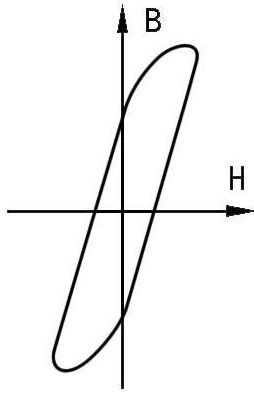


图 8.3 镍锌铁氧体在频率为 150 千赫的交变磁场中的磁化滞后回线

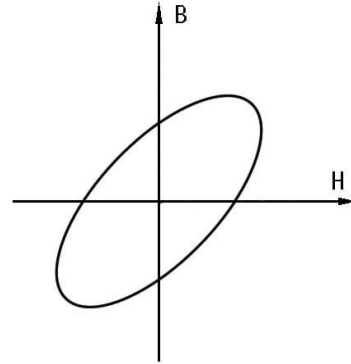


图 8.4 镍锌铁氧体在频率为 500 千赫的交变磁场中的磁化滞后回线

虽然目前我们已经有了能描述铁电铁磁体的量子理论，但如何在理论上给出铁电和铁磁体的极化和磁化强度与宏观电磁场间的非线性关系，或滞后回路曲线的函数形式，至今是个未解决的问题。对于磁化过程，目前已有的仅是瑞利 1887 年在弱场条件下给出的经验公式<sup>(11)</sup>：

$$B = \mu_0(\mu' + bH_0)H \pm \mu_0 \frac{b}{2}(H_0^2 - H^2) \quad (8.1)$$

其中  $\mu'$  是起始磁导率， $b$  是瑞利常数， $H_0$  是饱和磁化时的外磁场强度。式中正号对应于回线的上支，负号对应于回线的下支。设交变磁场为  $H = H_0 \sin \omega t$ ，令  $\alpha = bH_0 / \mu'$ ，可以将上式写为：

$$B = \mu_0 \mu' H_0 \left[ (1 + \alpha) \sin \omega t \pm \frac{\alpha}{2} \cos^2 \omega t \right] \quad (8.2)$$

令  $\alpha = 1$ ， $B_0$  为感应强度极大值，取横坐标取  $H_0$  为单位，纵坐标取  $B_0 / (2\mu_0 \mu')$  为单位，可得磁化曲线如图 8.2。

可以看出图中所示的滞后回线与实际的磁化滞后回线并不完全相符。首先图 8.2 不是近矩形，在低频条件下与图 8.1 不符。其次，在较高频条件下图 8.2 在极大值点处存在不连续的尖点，而不是连续光滑的椭圆曲线，也与图 8.3 和 8.4 也不符。一般交变磁场强度与磁化强度间存在位相差，在较高频条件下极大值  $B_0$  和  $H_0$  不在同一点上，但图 8.2 的极大值  $B_0$  和  $H_0$  在同一点上，没有位相差，这也与实际不符。因此铁电和铁磁介质的非线性现象需要寻找更好的理论解释。

## 2. 铁电铁磁体极化磁化强度与宏观电磁场的非线性关系

以下证明采用简单的偶极子模型和软模理论，在现有的铁电、铁磁体理论上引入电磁推迟相互作用后，就能给出铁电铁磁体的极化和磁化强度与宏观电磁场间的非线性关系，很好地描述交变电磁场中的滞后回路曲线。在高频条件下将结果用于非线性光学，得到的结果与目前唯象理论一致。我们来讨论带电量为  $q$  的带电粒子在交变外电场  $E = E_0 \sin \omega t$  的作用下的运动，不考虑电磁推迟相互作用时，运动方程为：

$$\frac{d^2r}{dt^2} + 2\beta \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = \frac{qE_0}{m} \sin \omega t \quad (8.3)$$

式中左边第二项为非保守阻尼力， $\beta > 0$ ，可以近似地认为包含了带电粒子的辐射阻尼力等。第三项代表偶极子受到的恢复力， $\omega_0$  是偶极子的固有振动频率。(8.3) 式的解可以写为：

$$r = A \sin(\omega t - \theta_0) + C e^{-\beta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t - \mathcal{G}) \quad (8.4)$$

式中  $C$  和  $\mathcal{G}$  是由初始条件确定的常数， $A$  和  $\theta_0$  为：

$$A = \frac{qE_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \quad \theta_0 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (8.5)$$

但在强场条件下粒子的运动速度有可能接近光速，需要考虑相对论效应，方程 (8.3) 应改写为：

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dr}{dt} + 2\beta \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = \frac{qE_0}{m} \sin \omega t \quad (8.6)$$

上式的直接积分是困难的，但考虑到在强场条件下上式左边第二、三项很小，且在  $t \rightarrow \infty$  时这两项实际上不起作用，只剩下粒子的受迫振动项，故可将上式简化为：

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{qE_0}{m} \sin \omega t \quad (8.7)$$

设  $t = 0$  时  $v = 0$ ， $r = r_0$ ，令  $q/mc\omega = \eta$ ，上式的解为：

$$\frac{v}{c} = \frac{\eta E_0 \cos \omega t}{\sqrt{1 + (\eta E_0 \cos \omega t)^2}} \quad \frac{\omega}{c}(r - r_0) = \arcsin \frac{\eta E_0 \sin \omega t}{\sqrt{1 + (\eta E_0)^2}} \quad (8.8)$$

对非电离态的偶极子， $r \sim 10^{-10}$  米，在我们讨论的问题中  $\omega \leq 10^{15}$ ，因此  $\omega r/c < 10^{-3} \ll 1$ 。故有  $\sin(\omega r/c) \sim \omega r/c$ ，就可以近似地将上式写为：

$$r - r_0 = \frac{qE_0 \sin \omega t}{m\omega^2 \sqrt{1 + (\eta E_0)^2}} \quad (8.9)$$

按 (8.8) 式，当  $\omega = 2\pi \times 50$  和  $E_0 = 52.3V/M$  时，对于电子  $qE_0/mc\omega = 1$ ，就有  $v \approx 0.7c$ 。而在  $\omega = 2\pi \times 10^{15}$  时要使电子的速度达到  $v \approx 0.7c$ ，需要  $E_0 = 10^{13}V/M$ 。将 (8.9) 式与 (8.4) 式比较，可知相对论效应相应于在  $r$  中增加了个因子  $1/\sqrt{1 + \eta^2 E_0^2}$ ，当  $\eta E_0 \ll 1$  时， $\sqrt{1 + \eta^2 E_0^2} \sim 1$ 。以下会看到这个因子很重要，在低频或强电场条件下它可以使高阶极化不超过低阶极化，避免非线性极化强度出现发散。因此当  $t \rightarrow \infty$  时，(8.6) 式的解可以近似地写为：

$$r = \frac{qE_0 \sin(\omega t - \theta_0)}{m\sqrt{1 + \eta^2 E_0^2} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} = A \sin(\omega t - \theta_0) \quad (8.10)$$

我们以下仅讨论  $t \rightarrow \infty$  时的稳定解。

铁电体可以主要分为两种类型，即位移型和有序无序型，先讨论位移型。对于位移型铁电体，在居里温度以下没有外场存在时，由于铁电体的特殊结构和粒子间的相互作用，晶格中某对正负离子受到的库仑力和恢复力正好大小相等，方向相反从而互相抵消。此时该对正负离子的振动频率就

被减慢或被冻结，形成静态位移，产生剩余偶极矩。也就是说按照软模理论<sup>(12)</sup>，在无外电场条件下铁电体中某些偶极子不振动， $\omega_0 = 0$ ，或振动频率变低，振动模被软化，从而产生离子间的静态位移和相变。又由于电偶极子平行排列使自由能最低，系统最稳定，故在临界温度以下铁电体中形成小体积的电畴结构，电畴中电偶极子平行排列。由于在无外电场时铁电体中各电畴的极化方向随机分布，使铁电体呈电中性状态。当存在外电场时，电畴的极化方向趋向外电场方向，使铁电体呈现出很强的极化。

设在临界温度以下，铁电体晶格中某对正负离子（或反铁电体两晶格间某对正负离子）离开原先平衡点的静态位移分别为  $\bar{r}_{0i}$  和  $\bar{r}_{0j}$ ，等价形成一个偶极矩：

$$\bar{P}_{ji} = q(\bar{r}_{0j} - \bar{r}_{0i}) = q\bar{r}_{0ji} \quad (8.11)$$

如图 8.11 所示。在外电场  $E = E_0 \sin \omega t$  作用下偶极子做简谐运动，外电场反向时，偶极矩方向也反向。设  $t$  时刻正负离子离平衡点的距离分别为  $\bar{r}_i$  和  $\bar{r}_j$ ，产生的偶极矩变为  $\bar{P}_{ji} = q(\bar{r}_j - \bar{r}_i) = q\bar{r}_{ji}$ 。在外加电场的作用下，正负电荷受力大小相等方向相反，偶极子受到的合力仍为零。为简单起见，先设正负离子的质量相等， $m_i = m_j$ ，有动量守恒  $m_i \bar{v}_i + m_j \bar{v}_j = 0$ ，则有  $\bar{v}_j = -\bar{v}_i$ ， $\bar{a}_j = -\bar{a}_i$ ， $\dot{\bar{a}}_j = -\dot{\bar{a}}_i$ 。另外我们知道，偶极矩  $\bar{P}$  在离偶极矩中心  $\bar{r}$  处产生的偶极势为  $U = \bar{P} \cdot \bar{r} / r^3$ 。考虑到电磁推迟相互作用后，就应该将  $U$  中的各个量都用推迟量来表示。因此利用 (7.4) 式，正负离子位移产生的推迟偶极矩可以近似地写为：

$$\begin{aligned} \bar{P}'_{ij} &= q_i \bar{r}'_{ij} = q_i \left( \bar{r}_{ij} + \frac{\bar{v}_j}{c} r_{ij} - \frac{\bar{a}_j}{2c^2} r_{ij}^2 + \frac{\dot{\bar{a}}_j}{6c^3} r_{ij}^3 + \dots \right) \\ &= q_i \left( \bar{r}_{ij} - \frac{\bar{v}_i}{c} r_{ij} + \frac{\bar{a}_i}{2c^2} r_{ij}^2 - \frac{\dot{\bar{a}}_i}{6c^3} r_{ij}^3 + \dots \right) \end{aligned} \quad (8.12)$$

式中  $\bar{v}_i$ ， $\bar{a}_i$ ， $\dot{\bar{a}}_i$  分别是  $i$  粒子在  $t$  时刻的速度，加速度和加加速度。我们可以将一个偶极子看成一个整体，不考虑  $j$  粒子的指标，仅用  $i$  指标来代表该偶极子，即令  $r_{ij} \rightarrow r_i$ 。当  $t \rightarrow \infty$  时考虑到 (8.10) 式，就有：

$$\begin{aligned} \bar{r}_i &= \bar{A}_i \sin(\omega t - \theta_0) & \bar{v}_i &= \bar{A}_i \omega \cos(\omega t - \theta_0) \\ \bar{a}_i &= -\bar{A}_i \omega^2 \sin(\omega t - \theta_0) & \dot{\bar{a}}_i &= -\bar{A}_i \omega^3 \cos(\omega t - \theta_0) \end{aligned} \quad (8.13)$$

为简单起见不考虑偶极子间的相互作用，可以认为  $\bar{r}_i$ ， $\bar{v}_i$ ， $\bar{a}_i$ ， $\dot{\bar{a}}_i$  的方向都在同一直线上。暂时不考虑振动模的软化问题，令  $\eta_i = q_i / (cm_i \omega)$ ，以及：

$$\alpha_i = \frac{q_i \cos \theta_{i0}}{cm_i \sqrt{(\omega_{i0}^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \quad (8.14)$$

利用 (8.13) 式，(8.12) 式可以写为：

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{cq_i \alpha_i E_0}{m_i \tau_i \sqrt{1 + \eta_i^2 E_0^2}} \left[ \sin(\omega t - \theta_{i0}) - \frac{\alpha_i E_0}{\sqrt{1 + \eta_i^2 E_0^2}} \cos(\omega t - \theta_{i0}) \right] \sin(\omega t - \theta_{i0}) \\ &\quad - \frac{\alpha_i^2 E_0^2}{2(1 + \eta_i^2 E_0^2)} \sin(\omega t - \theta_{i0}) \sin(\omega t - \theta_{i0})^2 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha_i^3 E_0^3}{6(1 + \eta_i^2 E_0^2)^{3/2}} \cos(\omega t - \theta_{i0}) \sin(\omega t - \theta_{i0})^3 + \dots ] \quad (8.15)$$

由此就引入了极化强度与电场强度间的非线性关系，当  $\eta_i E_0 \ll 1$  时，上式就变为非相对论条件下的非线性极化关系。

以下来讨论非线性项参数  $\alpha_i$ 。偶极子的固有振动频率一般为  $\omega_{i0} = 10^{10} \sim 10^{15}$ ，在临界温度以下采用软模条件，令  $\omega_{i0} \ll \omega$  或  $\omega_{i0} \sim 0$ 。在低频外场条件下若取  $\omega = 10$ ，由于  $\beta \ll \omega$ ，从 (8.15) 式可得  $\alpha_i E_0 / \sqrt{1 + \eta_i^2 E_0^2} = 0.98$ ，非线性效用就很强。在中低频电场条件下，如取  $\omega = 10^4$ ， $E_0 = 10^3$  伏/米， $\cos \theta_{i0} \sim 1$ ， $m_i = m_j = 10^{-26}$  公斤， $q_i = e = 1.6 \times 10^{-19}$  库仑，则  $\alpha_i E_0 / \sqrt{1 + \eta_i^2 E_0^2} = 0.005$ ，非线性作用较小。当外电场频率变大时  $\alpha_i$  变小，非线性效应变更小。当外电场频率足够大而电场强度不大时，非线性效应就很小以至于无法观察，此时的频率就是所谓的截止频率。但在临界温度以上不产生软模，由于对于中低频的外电场  $\omega < 10^7$ ，故  $\omega_{i0} \gg \omega$ 。此时 (8.15) 式中的  $\omega$  可以忽略。当外电场强度不是很强，例如  $E_0 = 10^6$  伏/米时，有  $\alpha_i E_0 = 10^{-6} \sim 10^{-8}$ ，非线性项就很小而无法观察。同时频率一定时，电场越强则极化的非线性程度也越强。以上结果都是与实验一致的，可见软模理论的晶格振动冻结假设对于产生铁电体的非线性关系是很重要的。

考虑到 (8.16) 式所示的仅是采用简单化的偶极子模型的结果。对于实际的铁电介质，还要考虑许多复杂的因素，如正负离子的质量不相等  $m_i \neq m_j$  时，令  $\tau = m_i / m_j$ ，从有动量守恒  $m_i \bar{v}_i + m_j \bar{v}_j = 0$  则有  $\bar{v}_j = -\tau \bar{v}_i$ ， $\bar{a}_j = -\tau \bar{a}_i$ ， $\dot{\bar{a}}_j = -\tau \dot{\bar{a}}_i$ 。(8.12) 就应改写为：

$$\begin{aligned} \bar{P}_{ij}' &= q_i \bar{r}_{ij}' = q_i \tau \left( \frac{1}{\tau} \bar{r}_{ij} + \frac{\bar{v}_j}{c} r_{ij} - \frac{\bar{a}_j}{2c^2} r_{ij}^2 + \frac{\dot{\bar{a}}_j}{6c^3} r_{ij}^3 + \dots \right) \\ &= q_i \tau \left( \frac{1}{\tau} \bar{r}_{ij} - \frac{\bar{v}_i}{c} r_{ij} + \frac{\bar{a}_i}{2c^2} r_{ij}^2 - \frac{\dot{\bar{a}}_i}{6c^3} r_{ij}^3 + \dots \right) \end{aligned} \quad (8.16)$$

我们还要考虑到晶体的对称性结构，偶极子间的相互作用，电子与离子间的相互作用以及统计性质等。可以将这些因素的影响全都归结为修正因子  $k_i$ ，在一般的情况下将实际铁电体的极化关系写为：

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{cq_i \alpha_i E_0}{m_i \tau_i \sqrt{1 + \eta_i^2 E_0^2}} \left[ k_{1i} \sin(\omega t - \theta_{i0}) - \frac{k_{2i} \alpha_i E_0}{\sqrt{1 + \eta_i^2 E_0^2}} \cos(\omega t - \theta_{i0}) \sin(\omega t - \theta_{i0}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_{3i} \alpha_i^2 E_0^2}{2(1 + \eta_i^2 E_0^2)} \sin(\omega t - \theta_{i0}) \sin(\omega t - \theta_{i0})^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_{4i} \alpha_i^3 E_0^3}{6(1 + \eta_i^2 E_0^2)^{3/2}} \cos(\omega t - \theta_{i0}) \sin(\omega t - \theta_{i0})^3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (8.17)$$

设铁电体单位体积中有  $N$  个有效的偶极子，且在外电场的作用下平行排列，产生的总极化强度为：

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^N \frac{cq_i^2 \alpha_i E_0}{m_i \tau_i \sqrt{1 + \eta_i^2 E_0^2}} \left[ k_{1i} \sin(\omega t - \theta_{i0}) - \frac{k_{2i} \alpha_i E_0}{\sqrt{1 + \eta_i^2 E_0^2}} \cos(\omega t - \theta_{i0}) \sin(\omega t - \theta_{i0}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_{3i} \alpha_i^2 E_0^2}{2(1 + \eta_i^2 E_0^2)} \sin(\omega t - \theta_{i0}) \sin(\omega t - \theta_{i0})^2 \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{k_{4i} \alpha_i^3 E_0^3}{6(1 + \eta_i^2 E_0^2)^{3/2}} \cos(\omega t - \theta_{i0}) |\sin(\omega t - \theta_{i0})|^3 + \dots ] \quad (8.18)$$

令  $\lambda = \sum_{i=1}^N \eta_i^2 / N$ ，我们可以将上式第一项写为：

$$\sum_{i=1}^N \frac{c q_i^2 \alpha_i k_{1i} E_0}{m_i \tau_i \sqrt{1 + \eta_i^2 E_0^2}} \sin(\omega t - \theta_{i0}) = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\sqrt{1 + \lambda E_0^2}} (x_1 \sin \omega t - y_1 \cos \omega t) \quad (8.19)$$

$$\text{式中：} \quad \frac{\varepsilon_0 E_0 x_1}{\sqrt{1 + \lambda E_0^2}} = \sum_{i=1}^N \frac{c q_i^2 \alpha_i E_0}{m_i \tau_i \sqrt{1 + \eta_i^2 E_0^2}} \quad \frac{\varepsilon_0 E_0 y_1}{\sqrt{1 + \lambda E_0^2}} = \sum_{i=1}^N \frac{c q_i^2 \alpha_i E_0}{m_i \tau_i \sqrt{1 + \eta_i^2 E_0^2}} \quad (8.20)$$

可以认为  $x_1$  和  $y_1$  是独立的，将它们视为  $x, y$  平面上点的坐标。令  $\chi_{e1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ， $y_1 / x_1 = \text{tg} \theta_1$ ，总可以将  $x_1$  和  $y_1$  写为  $x_1 = \chi_{e1} \cos \theta_1$ ， $y_1 = \chi_{e1} \sin \theta_1$ ，并将 (8.19) 式改写为：

$$\sum_{i=1}^N \frac{c q_i^2 \alpha_i E_0}{m_i \tau_i \sqrt{1 + \eta_i^2 E_0^2}} \sin(\omega t - \theta_{i0}) = \frac{\varepsilon_0 \chi_{e1} E_0}{\sqrt{1 + \lambda E_0^2}} \sin(\omega t - \theta_1) \quad (8.21)$$

同样可以将 (8.18) 式的第二项写为：

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \frac{c q_i k_{2i} \alpha_i^2 E_0^2}{m_i \tau_i (1 + \eta_i^2 E_0^2)} \cos(\omega t - \theta_{i0}) |\sin(\omega t - \theta_{i0})| \\ & = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{1 + \lambda E_0^2} (x_2 \cos \omega t |\sin \omega t| - y_2 \sin \omega t |\cos \omega t| + z_2 \sin \omega t |\sin \omega t| - z'_2 \cos \omega t |\cos \omega t|) \end{aligned} \quad (8.22)$$

$$\text{式中：} \quad \frac{\varepsilon_0 E_0^2 x_2}{1 + \lambda E_0^2} = - \sum_{j=1}^N \frac{q_i^2 k_{2i} E_0^2 \cos^2 \theta_{i0} |\cos \theta_{i0}|}{\varepsilon_0 c m_i (1 + \eta_i^2 E_0^2) \left[ (\omega_{i0}^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2 \right]} \quad (8.23)$$

$$\frac{\varepsilon_0 E_0^2 y_2}{1 + \lambda E_0^2} = - \sum_{i=1}^N \frac{q_i^2 k_{2i} E_0^2 \sin \theta_{i0} \cos \theta_{i0} |\sin \theta_{i0}|}{\varepsilon_0 c m_i \omega^2 (1 + \eta_i^2 E_0^2) \left[ (\omega_{i0}^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2 \right]} \quad (8.24)$$

$$\frac{\varepsilon_0 E_0^2 z_2}{1 + \lambda E_0^2} = - \sum_{i=1}^N \frac{q_i^2 k_{2i} E_0^2 \sin \theta_{i0} \cos \theta_{i0} |\cos \theta_{i0}|}{\varepsilon_0 c m_i \omega^2 (1 + \eta_i^2 E_0^2) \left[ (\omega_{i0}^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2 \right]} \quad (8.25)$$

$$\frac{\varepsilon_0 E_0^2 z'_2}{1 + \lambda E_0^2} = - \sum_{j=1}^N \frac{q_i^2 k_{2i} E_0^2 \cos^2 \theta_{i0} |\sin \theta_{i0}|}{\varepsilon_0 c m_i \omega^2 (1 + \eta_i^2 E_0^2) \left[ (\omega_{i0}^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2 \right]} \quad (8.26)$$

由于  $\sin \theta_{j0} = \cos(\pi/2 - \theta_{j0})$ ，对  $\sin \theta_{i0} |\cos \theta_{i0}|$  求和与对  $\cos \theta_{i0} |\sin \theta_{i0}|$  求和结果是一样的，故有  $z_2 = z'_2$ 。因此 (8.22) 式右边有三个独立参数，若改用  $\chi_2, \theta_2, \theta_3$  作为独立参数，可将 (8.22) 式写为：

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \frac{q_i^2 k_{2i} \alpha_i E_0^2 \cos \theta_{i0}}{m_i \omega^2 (1 + \eta_i^2 E_0^2)} \cos(\omega t - \theta_{i0}) |\sin(\omega t - \theta_{i0})| \\ & = \frac{\varepsilon_0 \chi_{e2} E_0^2}{1 + \lambda E_0^2} \cos(\omega t - \theta_2) |\sin(\omega t - \theta_3)| \end{aligned} \quad (8.27)$$

同样 (8.18) 式右边的第三项有四个独立参数  $\chi_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ ，第四项有五个独立参数  $\chi_4, \theta_7, \theta_8$ ，

$\theta_9, \theta_{10}$ , 等等, 最后可以将 (8.18) 式一般地写为:

$$P = \varepsilon_0 \left[ \frac{\chi_{e1} E_0}{\sqrt{1 + \lambda E_0^2}} \sin(\omega t - \theta_1) + \frac{\chi_{e2} E_0^2}{(1 + \lambda E_0^2)} \chi_{e2} E_0 \cos(\omega t - \theta_2) \sin(\omega t - \theta_3) \right. \\ \left. + \frac{\chi_{e3} E_0^3}{(1 + \lambda E_0^2)^{3/2}} \sin(\omega t - \theta_4) \sin(\omega t - \theta_5) \sin(\omega t - \theta_6) \right. \\ \left. + \frac{\chi_{e4} E_0^4}{(1 + \lambda E_0^2)^2} \cos(\omega t - \theta_7) \sin(\omega t - \theta_8) \sin(\omega t - \theta_9) \sin(\omega t - \theta_{10}) + \dots \right] \quad (8.28)$$

对于不同铁电体, 参数  $\chi_{en}$  和  $\theta_n$  一般是不同的, 可以由实验确定。

可以通过图示来证明, (8.28) 式能用来表示铁电体的极化滞后回线。为此将上式改写为:

$$P = \frac{\varepsilon_0 \chi_{e1} E_0}{\sqrt{1 + \lambda E_0^2}} \left[ b_1 \sin(\omega t - \theta_1) + b_2 \cos(\omega t - \theta_2) \sin(\omega t - \theta_3) \right. \\ \left. + b_3 \sin(\omega t - \theta_4) \sin(\omega t - \theta_5) \sin(\omega t - \theta_6) \right. \\ \left. + b_4 \cos(\omega t - \theta_7) \sin(\omega t - \theta_8) \sin(\omega t - \theta_9) \sin(\omega t - \theta_{10}) + \dots \right] \quad (8.29)$$

式中  $b_1 = 1, b_n = \chi_{en-1} E_0^{n-1} / \chi_{e1} (1 + \lambda E_0^2)^{(n-1)/2}$ 。取前两项令  $b_2 = 0.1, b_{n>2} = 0, \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$ 。当  $\omega t = \theta$  时极化强度  $P = 0$ ,  $\theta$  就为极化滞后位相。令极化强度的极大值为  $P_0$ , 在非相对论条件下略去  $\lambda E_0^2$ , 以  $P/(\varepsilon_0 \chi_{e1})$  为纵坐标的单位,  $E_0$  为横坐标的单位, 取  $\theta = 30^\circ$  和  $60^\circ$ , 得图 8.5 和 8.6。可以看出它们与图 8.2 和 8.3 所示的中频条件下的回线是一致的。实际上对于中频场, 我们只要考虑 (8.29) 式的第一项就可以简单地得到滞后回线, 第二项的作用是很小的。此结果表明在中频条件下即使不考虑由推迟相互作用产生的非线性项, 极化过程中位相的滞后也会产生滞后回线, 而且是产生滞后回线的主要原因, 非线性项的作用主要在于改变滞后回线的形状, 影响相对较小。

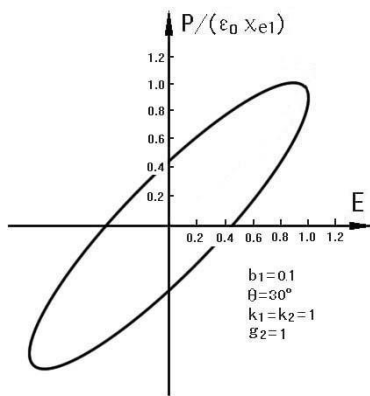


图 8.5 中频过程的极化滞后回线(1)

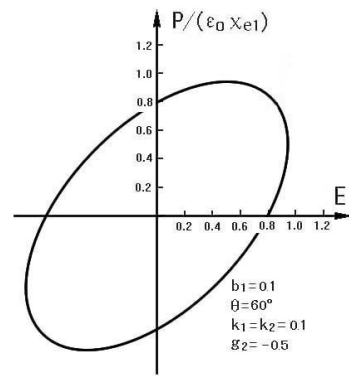


图 8.6 中频过程的极化滞后回线(2)

在低频电场的情况, 需要取较多的高阶项才能得到较好的结果。作为例子, 在 (8.29) 式中随机地取  $b_2 = 0.400, b_3 = 0.256, b_4 = 0.461, b_5 = 0.164, b_6 = 0.655, b_7 = 0.184, b_8 = -0.419,$   
 $b_9 = 0.042, b_{10} = 0.034, b_{11} = 0.027, b_{n>11} = 0, \theta_1 = 0.30, \theta_2 = 2.10, \theta_3 = 1.50, \theta_4 = -0.30,$

$\theta_5 = 1.30, \theta_6 = 6, \theta_7 = 6, \theta_8 = 1.20, \theta_{n>8} = 1.05 + (2n) \bmod 6$ , 得图 7.7。同样随机地取  $b_2 = 0.464, b_3 = 0.147, b_4 = 0.067, b_5 = 0.135, b_6 = 0.475, b_7 = 0.021, b_8 = -0.042, b_9 = 0.042, b_{10} = 0.034, b_{11} = 0.027, b_{n>11} = 0, \theta_1 = 0.27, \theta_2 = 3.18, \theta_3 = 1.78, \theta_4 = 0.08, \theta_5 = 0.16, \theta_6 = 3.03, \theta_7 = 5.58, \theta_8 = 5.56, \theta_{n>8} = 1 + 0.20n$ , 得到图 8.8。两图都有很好的矩形, 可见取足够多的项后, (8.29) 式可以较好地描述低频条件下的滞后回线。

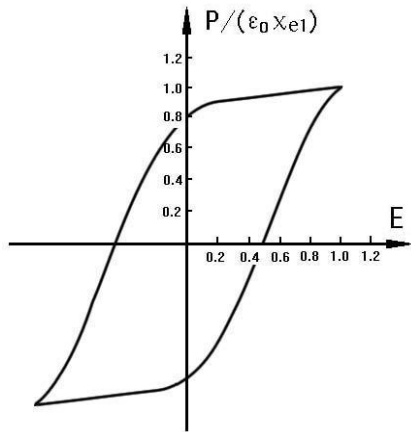


图 8.7 低频过程的极化滞后回线(1)

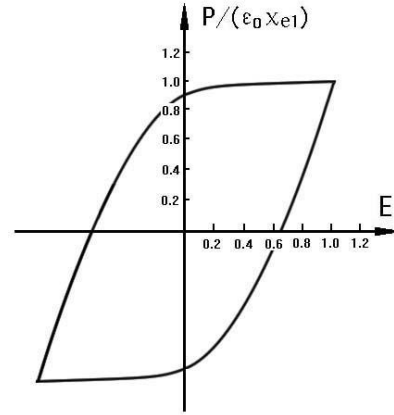


图 8.8 低频过程的极化滞后回线(2)

对于中低频交变电场, 在临界温度以上的顺电相中有  $\omega_{i0} \gg \omega$ , 在临界温度以下的铁电相中有  $\omega_{i0} \sim 0$ 。考虑到  $\beta\omega \ll \omega^2$ , 可以将 (8.15) 式改写为:

$$\alpha_{i0} = \frac{q_i \cos \theta_{i0}}{cm_i (\omega_{i0}^2 - \omega^2)} \quad \alpha_i = \frac{q_i \cos \theta_{i0}}{cm_i \omega^2} \quad (8.30)$$

就有:

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_{i0}} = \frac{\omega_{i0}^2 - \omega^2}{\omega^2} = \zeta_i \gg 1 \quad (8.31)$$

在临界温度以上的顺电相中, 可将 (8.28) 式改写为:

$$P_0 = \varepsilon_0 \left[ \frac{\chi_{0e1} E_0}{\sqrt{1 + \lambda E_0^2}} \sin(\omega t - \theta_1) + \frac{\chi_{0e2} E_0^2}{(1 + \lambda E_0^2)} \chi_{e2} E_0 \cos(\omega t - \theta_2) \sin(\omega t - \theta_3) \right. \\ \left. + \frac{\chi_{0e3} E_0^3}{(1 + \lambda E_0^2)^{3/2}} \sin(\omega t - \theta_4) \sin(\omega t - \theta_5) \sin(\omega t - \theta_6) \right. \\ \left. + \frac{\chi_{0e4} E_0^4}{(1 + \lambda E_0^2)^2} \cos(\omega t - \theta_7) \sin(\omega t - \theta_8) \sin(\omega t - \theta_9) \sin(\omega t - \theta_{10}) + \dots \right] \quad (8.32)$$

也有:

$$\frac{\chi_{ei}}{\chi_{0ei}} \sim \frac{\alpha_i}{\alpha_{0i}} = \zeta_i \gg 1 \quad (8.33)$$

在 (8.28) 和 (8.32) 式中取头一项进行比较, 就有  $P/P_0 \sim \zeta_1 \gg 1$ , 说明在相同的交变外电场强下, 铁电相的极化比顺电相大得多。



在 (8.28) 式中我们假定所有的偶极子在空间的排列方向都一致, 但实际情况并非如此。对于非空间各向同性介质, 应在 (8.28) 式中令  $\chi_{ei} \sim \vec{\chi}_{ei}$ ,  $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \sim \vec{r}\vec{r} \sim \vec{E}\vec{E}$ ,  $r^3 \sim \vec{r}\vec{r}\vec{r} \sim \vec{E}\vec{E}\vec{E}$ , 等等。对于一般的情况, 同时外加电场也应考虑推迟效应, 可写为  $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$ 。故在一般的情况下, 我们应将铁电体的极化与交变外电场强间的非线性极化关系写为:

$$\begin{aligned} \vec{P} = \epsilon_0 \left[ \frac{\vec{\chi}_{e1} \cdot \vec{E}_0}{\sqrt{1 + \lambda' E_0^2}} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \theta_1) + \frac{\vec{\chi}_{e2} \cdot \vec{E}_0 \vec{E}_0}{(1 + \lambda' E_0^2)} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \theta_2) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \theta_3) \right. \\ + \frac{\vec{\chi}_{e3} \cdot \vec{E}_0 \vec{E}_0 \vec{E}_0}{(1 + \lambda' E_0^2)^{3/2}} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \theta_4) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \theta_5) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \theta_6) \\ + \frac{\vec{\chi}_{e4} \cdot \vec{E}_0 \vec{E}_0 \vec{E}_0 \vec{E}_0}{(1 + \lambda' E_0^2)^2} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \theta_7) \\ \left. \times \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \theta_8) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \theta_9) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \theta_{10}) + \dots \right] \end{aligned} \quad (8.34)$$

### 3. 有序无序型铁电体的极化

以下我们讨论有序无序型铁电体的极化问题。以含氢键的铁电体来代表, 顺电相中氢离子在氢键的两个可能位置上等几率分布, 呈无序状态不出现自发极化。在铁电相中氢离子在氢键的两个可能位置上不等几率分布, 呈有序状态出现自发极化。也可以分为两种情况, 一种是氢离子在氢键的两个可能位置上不等几率分布导致其他正负离子对产生静态位移, 情况就与位移型铁电体一样, 氢离子的有序化分布仅是此类铁电体相变的触发机制。这类铁电体的极化与交变外电场强的非线性关系可以用 (8.34) 式来表示。另一类是氢离子在氢键的两个可能位置上不等几率分布直接导致自发极化, 以下讨论这种情况的铁电体的极化问题。

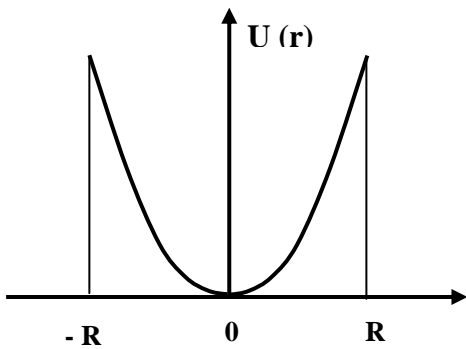


图 8.9 单势阱

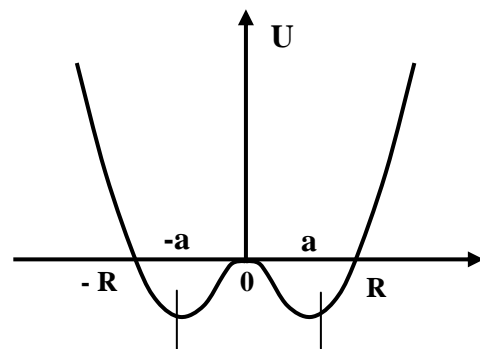


图 8.10 双势阱

我们知道偶极子的运动可用单势阱来表示, 图 8.9 表示的是单势阱。氢离子在氢键的两个可能位置上的运动可以用双势阱来表示, 双势阱如图 8.10 所示。临界温度以上氢离子在双势阱内运动, 无极化现象存在。临界温度以下氢离子被局限在其中一个势阱内运动, 甚至被固定在 a 点上。从图

8.10 中可以看出, 当离子被限制在  $0 \sim R$  间运动时, 势能曲线的形状与单势阱的形状类似, 也就是说此时氢离子被限制在单势阱内, 类似于在做偶极振动。如图 7.11 所示, 临界温度以下氢离子被局限在其中一个势阱内运动时, 产生的静态剩余偶极为  $\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$ 。因此这类铁电体的极化与交变外电场强的非线性关系可以用两个偶极子的极化的差值来表示, 结果同样也具有 (8.32) 式的形式。因此可以说 (8.32) 或 (8.34) 式是铁电体的宏观极化与交变外电场强度间非线性关系的普遍形式。

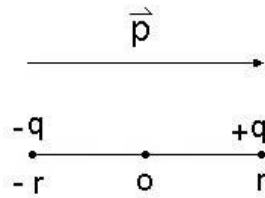


图 8.11 位移型铁电体产生的偶极矩

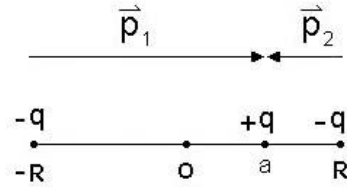


图 8.12 有序无序型铁电体产生的偶极矩

可以用同样的方法来讨论铁磁体的磁化过程和磁滞回线。按量子力学, 铁磁体有较大磁化强度的原因在于电荷间存在交换力, 使磁畴中磁矩平行排列时自由能最低, 系统最稳定。另外按宏观电磁学, 可以用等效磁荷概念来描述磁现象, 用磁偶极子模型和电磁推迟相互作用加上软模假设, 也能很好地描述铁磁体的磁化过程和磁滞回线。我们知道单个孤立的自由电子是没有磁矩的, 两个带电粒子间的相互作用可能产生磁矩。原子中电子绕核运动或二者间的相互作用结果可以产生磁矩或磁偶极子, 在交流外磁场的的作用下磁偶极子随时间振动, 就如于在外电场的的作用下电偶极矩随时间振动。故类似于铁电体软模理论, 可以认为在临界温度以上磁偶极子的固有振动频率  $\omega_{i0} \gg \omega \neq 0$ , 在临界温度以下磁偶极子的固有振动频率  $\omega_{i0} \sim 0$ 。因此与 (8.34) 式类似, 考虑到推迟相互作用后, 单个磁偶极子在交变外磁场  $\vec{H} = \vec{H}_0 \sin \omega t$  中的磁矩可以写为:

$$M_i = \frac{q_i'^2 \cos \theta_{i0} H_0}{m_i \omega^2 \sqrt{1 + \eta_i'^2 H_0^2}} \left[ \sin(\omega t - \theta_{i0}) - \frac{\alpha_i' H_0}{\sqrt{1 + \eta_i'^2 H_0^2}} \cos(\omega t - \theta_{i0}) \sin(\omega t - \theta_{i0}) \right. \\ \left. - \frac{\alpha_i'^2 H_0^2}{2(1 + \eta_i'^2 H_0^2)} \sin(\omega t - \theta_{i0}) \sin(\omega t - \theta_{i0})^2 \right. \\ \left. + \frac{\alpha_i'^3 H_0^3}{6(1 + \eta_i'^2 H_0^2)^{3/2}} \cos(\omega t - \theta_{i0}) \sin(\omega t - \theta_{i0})^3 + \dots \right] \quad (8.35)$$

为了估计  $\alpha_i'$  的数量级, 先估计等价磁荷  $q_i'$  的大小。由于只有外层电子才对原子或离子的磁矩有贡献, 设铁磁体中每个离子外层只有一个电子, 产生的磁矩为玻尔磁子  $M_i = \mu_0 e \hbar / (2m_e) \approx 1.2 \times 10^{-29}$  伯米。令原子间的距离  $r_i \approx 10^{-10}$  米, 按定义  $M_i = r_i q_i'$ , 每个原子离子的等价磁荷为  $q_i' \approx 1.2 \times 10^{-19}$  牛顿米/安培, 在数值上与电子电荷相似。若将  $m_i$  看成电子的质量,  $\alpha_i'$  大约是铁电体的  $10^3 \sim 10^4$  倍。如取  $f = 10^2$ , 只要  $H_0 = 0.1$  安/米, 取  $\cos \theta_{i0} = 1$ , 有  $\alpha_i' H_0 / \sqrt{1 + \eta_i'^2 H_0^2} = 0.38$ , 就可能产生较强的非线性。若将  $m_i$  视为原子核或离子的质量, 则  $\alpha_i'$  的数量级与铁电体相同。在实际情况中  $m_i$  应取电子和原子间的等价质量。对于一般的情况, 外加磁场强度应考虑推迟效应, 可写为  $\vec{H} = \vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$ 。按同样方法对上式求和, 就可以得到铁磁体在交变外磁场作用下磁化强度与磁场强度间的非线性关系。考虑到磁偶极子在空间的排列方向并都一致, 对于空间非各向同性介质,  $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \sim \vec{r} \vec{r} \sim \vec{H} \vec{H}$ ,

$r^3 \sim \bar{r}\bar{r}\bar{r} \sim \bar{H}\bar{H}\bar{H} \dots$ , 写成张量积的形式就有:

$$\begin{aligned} \bar{M} = \mu_0 \left[ \frac{\overset{\Rightarrow}{\chi}_{m1} \cdot \bar{H}_0}{\sqrt{1 + \lambda'H_0^2}} \sin(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x} - \theta_1) + \frac{\overset{\Rightarrow}{\chi}_{m2} \cdot \bar{H}_0 \bar{H}_0}{(1 + \lambda'H_0^2)} \cos(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x} - \theta_2) \sin(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x} - \theta_3) \right. \\ + \frac{\overset{\Rightarrow}{\chi}_{m3} \cdot \bar{H}_0 \bar{H}_0 \bar{H}_0}{(1 + \lambda'H_0^2)^{3/2}} s i(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x} - \theta_4) s i(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x} - \theta_5) s i(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x} - \theta_6) \\ \left. + \frac{\overset{\Rightarrow}{\chi}_{m4} \cdot \bar{H}_0 \bar{H}_0 \bar{H}_0 \bar{H}_0}{(1 + \lambda'H_0^2)^2} \cos(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x} - \theta_7) \right. \\ \left. \times [ \sin(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x} - \theta_8) \sin(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x} - \theta_9) \sin(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x} - \theta_{10}) + \dots ] \right] \quad (8.36) \end{aligned}$$

用上式同样可以描述磁滞回线, 此处不再赘述。

以同样的方式可以从经典角度解释光学中非线性关系。目前的非线性光学理论采用半经典的方法来讨论光和物质的相互作用, 即假定光的运动满足经典电磁场运动方程, 而物质的运动需要考虑量子规律。在非线性光学中, 假设电极化强度和电场强度之间满足的非线性关系为:

$$\bar{P} = \varepsilon_0 \left( \overset{\Rightarrow}{\chi}_{e1} \cdot \bar{E} + \overset{\Rightarrow}{\chi}_{e2} \cdot \bar{E}\bar{E} + \overset{\Rightarrow}{\chi}_{e3} : \bar{E}\bar{E}\bar{E} \dots \right) \quad (8.37)$$

上式加上麦克斯韦运动方程, 就能在理论上对光学中众多的非线性现象给出很好的解释。由于光学晶体一般是非铁电体, 不存在软模问题。将光学晶体中的原子分子视为偶极子, 则偶极子的固有振动频率  $\omega_0 \neq 0$ 。在 (8.34) 式中令  $\theta_1 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = \theta_8 = \theta_9 = \theta_{10} = \dots = \theta$ ,  $\theta'_2 = \theta_2 - 3\pi/2$ ,  $\theta'_7 = \theta_7 - 3\pi/2 \dots$ ,  $\bar{E} = \bar{E}_0 \sin(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x} - \theta)$ , 并略去  $\lambda E_0^2$ , 就可以变为 (8.37) 式。但应注意 (8.34) 式中电场强度与入射激光的电场强度间存在位相差  $\theta_i$ , 故 (8.34) 式具有更为普遍的意义, (8.37) 式只是它的一种特殊情况。(8.37) 式不考虑极化与外加电场之间的相位滞后, 但这种相位滞后实际上是存在的, 介质极化对外电场变化是不可能立即响应的。同时也应看到 (8.37) 式的非线性关系仅在电场强度不是太强的情况下才成立的, 在高强度条件下要考虑修正因子  $\sqrt{1 + \lambda E_0^2}$  存在, 极化强度与电场强度的非线性关系变更复杂。另外按量子力学的微扰论, 也能得到光学介质极化与电场强度间的非线性关系, 但考虑推迟相互作用后量子力学的结果要修正。

## 4. 电磁推迟相互作用与宏观电磁场的本构方程

采用国际标准单位制, 在介质以外的真空中, 经典宏观电磁场运动方程组为:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} \quad \nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j}_f + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (8.38)$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (8.39)$$

其中  $\rho_f$  为宏观自由电荷密度,  $\bar{j}_f$  为宏观自由电流密度。以上方程组对时间反演保持不变, 由此目前人们认为宏观电磁相互作用过程对时间反演保持不变。而在宏观介质内部, (8.38) 式应改为:

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_f \quad \nabla \times \bar{H} = \bar{j}_f + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (8.40)$$

代表的是总电荷密度为  $\rho = \rho_f + \rho_e$ ，总电流密度为  $\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_e + \vec{j}_m$  引起的电磁场在时空中满足的方程。其中  $\rho_e$  为介质内产生的束缚电荷密度， $\vec{j}_e$  为极化电流密度， $\vec{j}_m$  为磁化电流密度。对于非铁电铁磁介质，函数  $\vec{D}$  和  $\vec{E}$  之间以及  $\vec{B}$  和  $\vec{H}$  之间由以下所谓的本构方程联系：

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (8.41)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad (8.42)$$

从 (8.41) 式可知  $\vec{P}$  和  $\vec{E}$  之间，以及  $\vec{M}$  和  $\vec{H}$  之间满足线性关系。这种极化和磁化关系目前无法从理论上导出，只能根据实验唯象地假设。对于空间非各向同性介质， $\varepsilon$  和  $\mu$  应写为张量形式。在弱场条件下对于一般的非铁电铁磁介质， $\chi_e$  和  $\chi_m$  只与介质本身的性质有关，与电磁场强度无关。在强场条件下以及对于铁电铁磁介质， $\chi_e$  与  $\vec{E}$  有关， $\chi_m$  与  $\vec{B}$  有关，此时  $\vec{P}$  和  $\vec{E}$  之间以及  $\vec{M}$  和  $\vec{H}$  之间存在复杂的非线性关系，不满足 (8.41) 式。

前节我们在交变外电磁场存在的条件下，考虑到微观粒子间的推迟相互作用，采用简单的偶极子模型，导出极化矢量  $\vec{P}$  与电场强度  $\vec{E}$  间，以及磁化矢量  $\vec{M}$  与磁场强度  $\vec{B}$  间满足的非线性关系。而只要在公式 (8.34) 和 (8.36) 中令  $\chi_{ei} = \chi_{mi} = 0$ ， $i > 1$ ，（以及  $\omega = \vec{k} = 0$ ）我们就得到非铁电铁磁介质满足的线性关系 (8.41) 式。因此从微观带电粒子的电磁推迟相互作用出发，宏观介质满足的电磁场运动方程所有的 6 个未知函数  $\vec{D}$ 、 $\vec{H}$ 、 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 、 $\vec{P}$ 、 $\vec{M}$  能同时被确定，我们不再需要对极化矢量  $\vec{P}$  和磁化矢量  $\vec{M}$  的形式另行假设。也就是说考虑到微观带电粒子的推迟相互作用后，就可以使宏观介质系统满足的电磁场理论成为自足的理论，不再含有唯象的成分。

因此考虑到外加电场后，我们可以一般地得到宏观电场的运动方程：

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}_f + \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho_f + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{M} \quad (8.43)$$

其中  $\vec{E}$  是外加电场与介质内带电粒子产生的电场的总和。在存在介质吸收的特殊情况下时，还可以进一步考虑欧姆定律  $\vec{j}_f = \sigma \vec{E}$ ， $\sigma$  是电导率。于是上式就可以写为：

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho_f + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{M} \quad (8.44)$$

同样有外磁场存在时，可以一般地得到宏观介质中磁场的运动方程：

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = -\mu_0 \nabla \times \vec{j}_f - \mu_0 \nabla^2 \vec{M} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{P} - \mu_0 \nabla (\nabla \cdot \vec{M}) \quad (8.45)$$

以上两式描述宏观介质中的电磁场，可知在一般的情况下电磁场运动方程不能对时间反演保持不变。以上方程中有两个因素破坏时间反演对称性，即热耗散和非线性极化磁化。由于  $1/\sigma$  是电阻率，(8.44) 式左边第二项就与电磁相互作用过程中产生的热耗散有关，此项不能对时间反演保持不变。 $\sigma$  原则上也可以通过带电粒子间的电磁推迟相互作用计算。同时由于极化矢量  $\vec{P}$  和磁化矢量  $\vec{M}$  与微观粒子的电磁推迟相互作用有关，当  $t \rightarrow -t$  时一般有  $\vec{P}(x, -t) \neq \vec{P}(x, t)$ ， $\vec{M}(x, -t) \neq \vec{M}(x, t)$ 。故 (8.44) 和 (8.45) 式右边第二、三、四项一般也不能对时间反演保持不变。

因此目前人们一般认为的，宏观电磁场运动方程或宏观电磁相互作用过程对时间反演保持不变的看法是不正确的。虽然真空中麦克斯韦电磁场方程组对时间反演保持不变，但求解该方程组必需

加上本构方程和欧姆定律，否则不足以确定电磁场。而欧姆定律是从根本上破坏时间反演对称性的，在非线性情况下本构方程也是破坏时间反演对称性的。铁电、铁磁介质的极化和磁化是典型的电磁相互作用过程，由于存在滞后回路，会产生热耗散，也是明显地破坏时间反演对称性的。在非线性光学中也大量存在对时间反演不可逆的现象，如前文所述的光的倍频、和频、差频过程、双光子和多光子吸收过程、光学双稳态过程、受激拉曼散射过程、光回波过程等等。这类过程可以不存在热耗散，或产生的热耗散不是时间反演不对称的主要原因。产生时间反演不对称的原因在于，非线性极化磁化过程破坏时间反演对称性。

## 参考文献

11. L.Rayleigh, Phil. Mag. 23, 225(1887).
12. 铁电体物理学，钟维烈，科学出版社，中册，277 (1996).