电磁推迟相互作用与经典统计物理学的动力学基础和时间反演可逆性佯谬的消除

梅 晓 春

（福州原创物理研究所）

内容摘要 本章证明考虑到微观粒子间的电磁推迟相互作用后，就可以自然地在经典统计力学中引入非保守的耗散力和时间反演不对称性，为经典统计物理学提供合理的动力学基础。文中给出修正的刘维方程，证明对于孤立系统平衡态不需要等几率假设，直接从修正后的刘维方程出发就可以导出微正则系综，正则系综，近独立子系统分布，最可几分布和麦克斯韦速度分布。表明大部分孤立系统的平衡态都是不等几率的，微正则系综不适合作为平衡态统计理论的基础。彻底消除了统计物理学中长期存在的可逆性佯谬，使平衡态统计力学与非平衡态统计力学的描述达到统一，并在此基础上导出存在耗散性的 BBGKY 序列方程和流体力学方程。

1．经典统计物理学中存在的基本问题

经典统计物理学由平衡态统计理论和非平衡态统计理论组成。虽然经典统计物理学理论已经得到高度的发展，但它的基础实际上至今仍没有很好地建立起来[13]。对于平衡态统计理论，涉及到其基本假设——等几率假设的合理性问题。等几率假设或微正则系综假设自从提出以来就受到不少的批评。为了对这一假设给予合理的解释，玻尔兹曼提出各态历经假说，证明系统只要各态历经，等几率假设就能成立。然而研究表明系统的演化一般是不可能各态历经的[14]，因此等几率假设的合理性是有问题的，它仅是一个有用的工具而已。至于非平衡态统计理论，至今没有完备而统一的理论，尚缺乏一个真正合理的基础。我们既不知道如何正确地描述一个系统从非平衡态到平衡态的演化，也不知如何解决著名的可逆性佯谬问题。

可逆性佯谬问题的历史由来已久，目前存在两种提法。第一种是由洛喜密脱在 1876 年提出的[15]，认为任何微观动力学方程都能对时间反演保持不变，既微观粒子的运动存在可逆性。由于任何物理上的宏观系统都由微观粒子组成，故当一个宏观系统中所有的微观粒子的速度都被反向后，宏观系统的演化必向反向进行，因而过程也必然是可逆的。第二种提法是由策梅罗于 1896 年根据彭加莱证明的一个定理[16]，提出的所谓的彭加莱回归，表明一个处于有限空间内的保守系统经过足够长的时间后，必将回到其初始态的无限近的领域。然而我们在孤立宏观系统的演化过程中观察到的现象总是不逆的，因而存在矛盾，既所谓的可逆性佯谬。可逆性佯谬问题提出后人们进行了长期大量的讨论，提出许多的解释，如粗粒化理论，混合流理论等等，但都不能令人满意。因此要为经典统计物理学找到真正合理的基础，关键之一在于解决宏观过程时间反演不可逆性的来源问题。

2．洛伦兹推迟力和经典统计物理学的基本假设

按目前流行的看法，认为任何微观过程都能对时间反演保持不变。所谓微观过程对时间反演保持不变指微观粒子的运动方程对时间反演不变。众所周知运动方程有两类，一类是对单个粒子的动

力学方程，另一类是对大量粒子的统计性运动方程。在洛喜密脱时代量子力学尚未出现，对时间反演保持不变的"微观"动力学方程实际上指牛顿运动方程 $md^2\bar{r}/dt^2=\bar{F}$。牛顿力学方程是否对时间反演不变取决于力 $\bar{F}$ 的形式，只有 $\bar{F}(t)=\bar{F}(-t)$ 时运动方程才是不变的。当 $\bar{F}$ 是仅与粒子坐标有关的保守力时，这个条件能得到满足。但在一般情况下若 $\bar{F}$ 与时间和动量有关时，这一条件并不总能满足。牛顿动力学方程仅给出力与加速度之间的关系，粒子受力的形式还需另行确定。目前已知自然界中存在四种相互作用力，即强、弱、电磁相互作用力和万有引力。经典统计物理学研究的对象是由大量原子分子组成的系统，而原子分子由带电粒子组成，带电粒子间的相互作用力为电磁力，故在经典统计物理学中我们只要需考虑电磁相互作用。对于电中性的原子和分子，由于原子分子中的电荷分布的不对称，或由相互作用引起的形变导致电荷分布不对称，就会产生电磁偶极矩和多极矩。原子分子间的相互作用力或所谓的范德华力实际上是原子分子的电磁偶极矩和多极矩之间的相互作用力。本章的目的在于提供一种原则，故只讨论带电粒子间的电磁相互作用，结论可直接用于等离子体系统。对于原子分子电磁偶极矩和多极矩间的相互作用，可在具体的实际问题中进行讨论。

在不考虑推迟相互作用的情况下，两个电荷为 q 和 q'，速度为 $\bar{v}$ 和 $\bar{v}'$ 的经典带电粒子间的相互作用力为洛伦兹力：

$$\bar{F}=\frac{qq'\bar{r}}{r^3}+\frac{qq'\bar{v}'\times(\bar{v}\times\bar{r})}{c^2r^2} \tag{9.1}$$

在时间反演变换下 $\bar{v}\to-\bar{v}$，$\bar{v}'\to-\bar{v}'$，故上式是时间反演不变的。目前在经典统计物理学我们都用上式来描述带电粒子间的相互作用力。显然若采用上式，我们就不能期望能从动力学的角度在宏观演化过程中引入不可逆性，也就不可能从动力学的角度解决非平衡统计理论存在的问题。

然而应注意的是，按狭义相对论不存在瞬时相互作用，电磁相互作用是以光速传播的，存在推迟相互作用问题。可以证明引入推迟相互作用后，洛伦兹力在时间反演下就不能保持不变。以下我们用带撇的量表示推迟量，考虑到推迟时间相互作用后，一个电荷为 q_j 在 t' 时刻位于空间 $\bar{x}'_j(t')$ 处以速度 $\bar{v}'_j(t')$ 运动的 j 粒子，在 t 时刻于空间 $\bar{x}_i(t)$ 处产生的电磁推迟势为李纳--谢维尔势：

$$\varphi'_{ij}=\frac{q_j}{(1-\bar{v}'_j\cdot\bar{n}'_{ij}/c)\,r'_{ij}} \qquad \bar{A}'_{ij}=\frac{q_j\bar{v}'_j}{c(1-\bar{v}'_j\cdot\bar{n}'_{ij}/c)r'_{ij}} \tag{9.2}$$

式中 $\bar{r}'_{ij}(t,t')=\bar{x}_i(t)-\bar{x}'_j(t')$，$r'_{ij}=|\bar{r}'_{ij}|$，$\bar{n}'_{ij}=\bar{r}'_{ij}/r'_{ij}$。令 $\bar{a}'_j$ 为 j 粒子在 t' 时刻的加速度，以及 $v'_{jn}=\bar{v}'_j\cdot\bar{n}'_{ij}$，$a'_{jn}=\bar{a}'_j\cdot\bar{n}'_{ij}$，则 j 粒子在 t 时刻在空间 $\bar{x}_i(t)$ 处产生的电磁场强度为：

$$\bar{E}'_{ij}=\left[\frac{q_j(1-v_j'^2/c^2)(\bar{n}'_{ij}-\bar{v}'_j/c)}{(1-v'_{jn}/c)^3r_{ij}'^2}+\frac{q_j\bar{n}'_{ij}\times[(\bar{n}'_{ij}-\bar{v}'_j/c)\times\bar{a}'_j]}{c^2(1-v'_{jn}/c)^3r'_{ij}}\right]_{t'} \qquad \bar{B}'_{ij}=\bar{n}'_{ij}\times\bar{E}'_{ij} \tag{9.3}$$

此时电磁场强度与粒子的加速度有关。可以将以上考虑到推迟相互作用后的洛伦兹力称为洛伦兹推迟力。设系统有 N 个粒子，在 t 时刻空间 $\bar{x}_i(t)$ 处有一个电荷为 q_i，以速度 $\bar{v}_i$ 运动的 i 粒子，令 $v'_{in}=\bar{n}'_{ij}\cdot\bar{v}_i$，则 i 粒子受到的由 j 粒子产生的洛伦兹推迟力为：

$$\bar{F}'_{Rij}=q_i\bar{E}'_{ij}+q_i\bar{v}_i\times\bar{B}'=\frac{q_iq_j(1-v_j'^2/c^2)}{(1-v'_{jn}/c)^3r_{ij}'^2}\left[\bar{n}_{ij}\left(1-\frac{\bar{v}_i\cdot\bar{v}'_j}{c^2}\right)-\frac{\bar{v}'_j}{c}\left(1-\frac{v'_{in}}{c}\right)\right]$$

$$+\frac{q_iq_j}{c^2(1-v'_{jn}/c)^3r'_{ij}}\left\{\bar{n}'_{ij}\left[a'_{jn}\left(1-\frac{\bar{v}_i\cdot\bar{v}'_j}{c^2}\right)-\frac{\bar{v}_i\cdot\bar{a}'_j}{c}\left(1-\frac{v'_{jn}}{c}\right)\right]\right.$$

$$-\frac{\vec{v}_j' a_{jn}'}{c}\left(1-\frac{v_{in}'}{c}\right)-\vec{a}_j'\left(1-\frac{v_{in}'}{c}\right)\left(1-\frac{v_{jn}'}{c}\right)\Bigg\} \tag{9.4}$$

因此对于$v << c$的非相对论情况，保留到与v^2 / c^2成正比的项，可以将（9.4）式写为：

$$\vec{F}_{Rij}' = \frac{q_i q_j}{r_{ij}'^2}\left\{\frac{\vec{r}_{ij}'}{r_{ij}'}\left(1+\frac{3v_{jn}'}{c}+\frac{3v_{jn}'^2}{c^2}-\frac{v_j'^2}{c^2}-\frac{\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j'}{c^2}+\frac{a_{jn}' r_{ij}'}{c^2}\right)-\frac{\vec{v}_j'}{c}\left(1+\frac{3v_{jn}'}{c}-\frac{v_{in}'}{c}\right)-\frac{\vec{a}_j' r_{ij}'}{c^2}\right\} \quad 9.5)$$

为了讨论问题方便，我们需要在（9.5）式中将推迟量$\vec{x}_j'(t')$、$\vec{v}_j'(t')$和$\vec{a}_j'(t')$用非推迟量来表示。考虑到$\vec{r}_j'(t') = \vec{r}_j'(t - r'/c)$，有关系$\vec{v}_j(t) = d\vec{x}_j'(t')/dt'\Big|_{r_{ij}'/c=0}$，$\vec{a}_j(t) = d^2\vec{x}_j'(t')/dt'^2\Big|_{r_{ij}'/c=0}$，于是可将$\vec{r}_{ij}'(t')$按$r_{ij}'/c$阶展开成级数，考虑到$d\vec{r}_{ij} = -d\vec{x}_j/dt = -\vec{v}_j$，得[8]：

$$\vec{r}_{ij}'(t') = \vec{r}_{ij}'(t - r_{ij}'/c) = \vec{r}_{ij}(t) + \frac{r_{ij}'}{c}\vec{v}_j(t) - \frac{r_{ij}'^2}{2c^2}\vec{a}_j(t) + \frac{r_{ij}'^3}{6c^3}\dot{\vec{a}}_j(t) + \cdots \tag{9.6}$$

当粒子的速度$v << c$时，我们可以近似地在上式$(t - r_{ij}'/c)$中令$r_{ij}'(t') \approx r_{ij}(t)$。以下证明对于经典电磁推迟相互作用力，在与$v/c$成正比的量级就会出现时间反演对称性破坏，但对于电磁相互作用哈密顿量，只有到v^3/c^3的量级才会出现时间反演对称性破坏。保留到与v^3/c^3成正比的项，得：

$$\vec{r}_{ij}'(t') = \vec{r}_{ij}'(t - r_{ij}/c) = \vec{r}_{ij} + \frac{r_{ij}}{c}\vec{v}_j - \frac{r_{ij}^2}{2c^2}\vec{a}_j + \frac{r_{ij}^3}{6c^3}\dot{\vec{a}}_j + \cdots \tag{9.7}$$

$$r_{ij}'(t') = r_{ij}\left\{1 + \frac{v_{jn}}{c} - \frac{a_{jn} r_{ij}}{2c^2} + \frac{v_j^2}{2c^2} + \frac{\dot{a}_{jn} r_{ij}^2}{6c^3} - \frac{\vec{v}_j \cdot \vec{a}_j r_{ij}}{2c^3} + \cdots\right\} \tag{9.8}$$

$$\vec{v}_j'(t') = \vec{v}_j - \frac{r_{ij}}{c}\vec{a}_j + \frac{r_{ij}^2}{2c^2}\dot{\vec{a}}_j - \frac{r_{ij}^3}{6c^3}\ddot{\vec{a}}_j + \cdots \tag{9.9}$$

$$\vec{a}_j'(t') = \vec{a}_j - \frac{r_{ij}}{c}\dot{\vec{a}}_j + \frac{r_{ij}^2}{2c^2}\ddot{\vec{a}}_j + \cdots \tag{9.10}$$

以上诸式中已将推迟量转化为非推迟量。以下几个近似式也是要常用的：

$$\frac{1}{r_{ij}'} \approx \frac{1}{r_{ij}}\left\{1 + \frac{v_{jn}^2}{c^2} - \frac{v_j^2}{2c^2} + \frac{a_{jn} r_{ij}}{2c^2} + \frac{v_{jn} v_j^2}{2c^3} - \frac{v_{jn} a_{jn} r_{ij}}{2c^3} + \frac{\vec{a}_j \cdot \vec{v}_j r_{ij}}{2c^3} - \frac{\dot{a}_{jn} r_{ij}^2}{6c^3}\right\} \tag{9.11}$$

$$\frac{1}{r_{ij}'^2} \approx \frac{1}{r_{ij}^2}\left\{1 + \frac{2v_{jn}^2}{c^2} - \frac{v_j^2}{c^2} + \frac{a_{jn} r_{ij}}{c^2} + \frac{v_{jn} v_j^2}{c^3} - \frac{v_{jn} a_{jn} r_{ij}}{c^3} + \frac{\vec{a}_j \cdot \vec{v}_j r_{ij}}{c^3} - \frac{\dot{a}_{jn} r_{ij}^2}{3c^3}\right\} \tag{9.12}$$

$$\frac{1}{r_{ij}'^3} \approx \frac{1}{r_{ij}^3}\left\{1 + \frac{3v_{jn}^2}{c^2} - \frac{3v_j^2}{2c^2} + \frac{3a_{jn} r_{ij}}{2c^2} + \frac{3v_{jn} v_j^2}{2c^3} - \frac{3v_{jn} a_{jn} r_{ij}}{2c^3} + \frac{3\vec{a}_j \cdot \vec{v}_j r_{ij}}{2c^3} - \frac{\dot{a}_{jn} r_{ij}^2}{2c^3}\right\} \tag{9.13}$$

$$\vec{n}'_{ij}=\frac{\vec{r}'_{ij}}{r'_{ij}}=\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}\left\{1+\frac{v_{jn}^2}{c^2}-\frac{v_j^2}{2c^2}+\frac{a_{jn}r_{ij}}{2c^2}+\frac{v_{jn}v_j^2}{2c^3}-\frac{v_{jn}a_{jn}r_{ij}}{2c^3}+\frac{\vec{a}_j\cdot\vec{v}_j r_{ij}}{2c^3}-\frac{\dot{a}_{jn}r_{ij}^2}{6c^3}\right\}$$

$$+\frac{\vec{v}_j}{c}\left\{1+\frac{v_{jn}^2}{c^2}-\frac{v_j^2}{2c^2}+\frac{a_{jn}r_{ij}}{2c^2}\right\}-\frac{r_{ij}}{2c^2}\vec{a}_j+\frac{r_{ij}^3}{6c^3}\dot{\vec{a}}_j \qquad (9.14)$$

$$\frac{\vec{r}'_{ij}}{r'^3_{ij}}\approx\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\left(1+\frac{3v_{jn}^2}{c^2}-\frac{3v_j^2}{2c^2}+\frac{3a_{jn}r_{ij}}{2c^2}+\frac{3v_{jn}v_j^2}{2c^3}-\frac{3v_{jn}a_{jn}r_{ij}}{2c^3}+\frac{3\vec{a}_j\cdot\vec{v}_j r_{ij}}{2c^3}-\frac{\dot{a}_{jn}r_{ij}^2}{2c^3}\right)$$

$$+\frac{\vec{v}_j}{cr_{ij}^2}\left(1+\frac{3v_{jn}^2}{c^2}-\frac{3v_j^2}{2c^2}+\frac{3a_{jn}r_{ij}^2}{2c^2}\right)-\frac{\vec{a}_j}{2c^2 r_{ij}}+\frac{\dot{\vec{a}}_j}{6c^3} \qquad (8.15)$$

利用以上诸式，保留到与v^2/c^2成正比的项，（9.5）式就可以用非推迟量表示为：

$$\vec{F}'_{Rij}=\frac{q_i q_j}{r_{ij}^2}\left\{\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}\left(1+\frac{3v_{nj}}{c}+\frac{3v_{jn}^2}{2c^2}+\frac{v_j^2}{2c^2}-\frac{a_{jn}r_{ij}}{2c^2}-\frac{\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j}{c^2}\right)+\frac{\vec{v}_j v_{in}}{c^2}-\frac{\vec{a}_j r_{ij}}{2c^2}\right\} \qquad (9.16)$$

由于时间反演下$\vec{r}\to\vec{r}$，$\vec{v}\to-\vec{v}$，$\vec{a}\to\vec{a}$，$\dot{\vec{a}}\to-\dot{\vec{a}}$，引入推迟相互作用后洛伦兹力在时间反演下不能保持不变。含v/c的一阶项破坏时间反演对称性，与v^2/c^2成正比的二阶项对时间反演保持不变。保留到与v^3/c^3成正比的项，（9.2）式所示的电磁势可以用非推迟量表示为：

$$\varphi'_{ij}=\frac{q_j}{r_{ij}}\left\{1+\frac{v_{jn}^2}{c^2}-\frac{v_j^2}{2c^2}+\frac{a_{jn}r_{ij}}{2c^2}+\frac{v_{jn}v_j^2}{2c^3}-\frac{v_{jn}a_{jn}r_{ij}}{2c^3}+\frac{\vec{a}_j\cdot\vec{v}_j r_{ij}}{2c^3}-\frac{\dot{a}_{jn}r_{ij}^2}{6c^3}+\cdots\right\} \qquad (9.17)$$

$$\vec{A}'_{ij}=\frac{q_j}{r_{ij}}\left\{\left(1+\frac{v_{jn}^2}{c^2}-\frac{v_j^2}{2c^2}+\frac{a_{jn}r_{ij}}{2c^2}+\cdots\right)\frac{\vec{v}_j}{c}-\frac{\vec{a}_j r_{ij}}{c^2}+\frac{\dot{\vec{a}}_j r_{ij}^2}{2c^3}\cdots\right\} \qquad (9.18)$$

一个带电荷q_j以速度$\vec{v}_j$运动的j粒子产生的电磁场，对另一个带电荷q_i以速度$\vec{v}_i$运动的i粒子的电磁相互作用能为：

$$U_{ij}=q_i\left(\varphi_{ij}+\vec{A}_{ij}\cdot\frac{\vec{v}_i}{c}\right)=\frac{q_i q_j}{r_{ij}}\left\{1+\frac{v_{jn}^2}{c^2}-\frac{v_j^2}{2c^2}+\frac{a_{jn}r_{ij}}{2c^2}+\frac{\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j}{c^2}\right.$$

$$\left.+\frac{v_{jn}v_j^2}{2c^3}-\frac{v_{jn}a_{jn}r_{ij}}{2c^3}+\frac{\vec{a}_j\cdot\vec{v}_j r_{ij}}{2c^3}-\frac{\dot{a}_{jn}r_{ij}^2}{6c^3}-\frac{\vec{v}_i\cdot\vec{a}_j r_{ij}}{c^3}+\cdots\right\} \qquad (9.19)$$

电磁相互作用能中不含与v/c成比例的项。时间反演对称性破坏发生在与v^3/c^3成比例的项中。这结果与第二、三和四章量子理论结果是一致的，即由相互作用哈密顿量引起的时间反演对称性在三阶过程产生，是比较很小的。束缚态量子跃迁过程与初始态的不同引起的时间反演对称性破坏发生在二阶过程产生，是比较大的。而洛伦兹力最低阶的时间反演对称性破坏与v/c成正比，与其对应的相互作用能与v^2/c^2成正比，对时间反演却是不变的。因此为一致性起见，讨论洛伦兹力的时间反演对称性破坏时，我们至少应当考虑到与v^2/c^2成正比的项的效应。

考虑到与v^3/c^3成正比的项后，由于$\vec{r}_{ij}=-\vec{r}_{ji}$，带电荷为$q_i$以速度$\vec{v}_i$运动的$i$粒子产生的电磁场场对一个带电为$q_j$以速度$\vec{v}_j$运动的$j$粒子产生的相互作用能可以写为：

$$U_{ji}=q_j\left(\varphi_{ji}+\vec{A}_{ji}\cdot\frac{\vec{v}_j}{c}\right)=\frac{q_iq_j}{r_{ij}}\left\{1+\frac{v_{in}^2}{c^2}-\frac{v_i^2}{2c^2}-\frac{a_{in}r_{ij}}{2c^2}+\frac{\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j}{c^2}\right.$$

$$\left.-\frac{v_{in}v_i^2}{2c^3}-\frac{v_{in}a_{in}r_{ij}}{2c^3}+\frac{\vec{a}_i\cdot\vec{v}_ir_{ij}}{2c^3}+\frac{\dot{a}_{in}r_{ij}^2}{6c^3}-\frac{\vec{v}_j\cdot\vec{a}_ir_{ij}}{c^3}+\cdots\right\} \tag{9.20}$$

显然$U_{ij}\neq U_{ji}$，可见考虑到推迟相互作用后的情况与未考虑推迟相互作用时是不一样的，我们讨论推迟相互作用时要考虑什么粒子对什么粒子的相互作用。设一个系统中有 N 个粒子，因此考虑到推迟相互作用后，系统总的相互作用能和总哈密顿量为：

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}U_{ij}=U_0+U' \tag{9.21}$$

由于$U_{ij}\neq U_{ji}$，上式i， j坐标重复求和，故总的相互作用能乘上因子$1/2$表示平均值。但在讨论系统对某一确定的粒子的相互作用时，约定只取有关的相应项，不必考虑$1/2$因子。式中U_0是保守的相互作用能，U'是非保守的相互作用能。

另外按经典电磁理论，带电粒子有加速度和辐射时，会产生辐射阻尼力$\vec{G}$。辐射阻尼力与加加速度$\dot{a}$有关。设l为带电粒子线度，粒子速度$v\ll c$，加速度$a\ll c^2/l$，加加速度$\dot{a}\ll c^3/l^2$。当电荷是球对称分布时，可以得到$\vec{G}=\kappa\dot{\vec{a}}$，$\kappa=2q^2/3c^3$。因此系统中第$i$粒子除了受到其它粒子产生的洛伦兹推迟力的作用外，还要受到自身辐射阻尼力的作用。由于辐射阻尼力的数量级与v^3/c^3成比例，也是破坏时间反演对称性的。但由于量级较小，我们在以下的讨论中就不予考虑。对于由原子分子等中性粒子构成的宏观系统，可将原子分子看成由带电粒子组成的电磁偶极矩和多极矩，同样可以求出粒子间相应的洛伦兹推迟力，但此问题本文不予讨论。

因此为了得到由相互作用能引起的时间反演对称性破坏，我们需要考虑推迟力中含v^2/c^2的项。将（9.16）式简化地写为$\vec{F}'_{Rij}=\vec{F}_{ij}+\vec{F}'_{ij}$，其中$\vec{F}_{ij}$是保守力，$\vec{F}'_{ij}$是非保守力，有：

$$\vec{F}_{ij}=\frac{q_iq_j\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\qquad \vec{F}'_{ij}=\frac{q_iq_j}{r_{ij}^2}\left\{\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}\left(\frac{3v_{nj}}{c}+\frac{3v_{jn}^2}{2c^2}+\frac{v_j^2}{2c^2}-\frac{a_{jn}r_{ij}}{2c^2}-\frac{\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j}{c^2}\right)+\frac{\vec{v}_jv_{in}}{c^2}-\frac{\vec{a}_jr_{ij}}{2c^2}\right\} \tag{9.16}$$

系统中所有其它粒子对i粒子的作用力为：

$$\vec{F}'_{Ri}=\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij}+\sum_{j=1}^{N}\vec{F}'_{ij}=\vec{F}_i+\vec{F}'_i \tag{9.23}$$

经典电磁理论的哈密顿运动方程既可以用坐标和正则动量$(\vec{x}_i,\vec{p}_{zi})$作为独立变量来描述，也可以用坐标和普通动量$(\vec{x}_i,\vec{p}_i)$作为独立变量来描述，有关系$\vec{p}_{zi}=\vec{p}_i+q_i\vec{A}_i/c$。用这两种变量描述在原则上是等价的，但由于在统计物理的相空间用普通动量来描述更为方便，故我们以下用坐标和普通动量来表述哈密顿正则运动方程。因此考虑到带电粒子间的推迟相互作用，忽略辐射阻尼力后，含N个带电粒子的非保守系统总哈密顿量可以写为$H=H_0+H'$，其中H_0是保守的哈密顿量：

$$H_0=\sum_i\frac{\vec{p}_i^2}{2m_i}+\sum_{i<j}U_{0ij}(\vec{x}_i,\vec{x}_j) \tag{9.24}$$

式中$U_{0ij}(\bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{i}},\bar{\mathrm{x}}'_{\mathrm{j}})$是保守的相互作用能。$H'$是非保守的哈密顿量：

$$H' = \sum_i U_i(\bar{x}_i, t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} U_{ij}(\bar{x}_i, \bar{x}_j, \bar{p}_i, \bar{p}_j) \tag{9.25}$$

$U_i(\bar{x}_i, t)$外力引起的相互作用能，一般与时间有关，$U_{ij}(\bar{x}_i, \bar{x}_j, \bar{p}_i, \bar{p}_j)$是非保守力引起的相互作用能。系统中$i$粒子的哈密顿运动方程可以写为：

$$\dot{x}_{i\sigma} = \frac{\partial H_0}{\partial p_{i\sigma}} \qquad \dot{p}_{i\sigma} = -\frac{\partial H_0}{\partial x_{i\sigma}} + F'_{i\sigma} = F_{i\sigma} + F_{ei\sigma} + F'_{i\sigma} \tag{9.26}$$

其中σ代表三维空间分量，$F_{ei\sigma} = F_{ei\sigma}(\bar{x}_i, t)$是系统受到的外力，一般与时间有关，$F'_{i\sigma}$是非保守力。

因此，我们可以将以下的两条基本假设做为经典统计物理学的基础：

1．宏观系统中微观带电粒子间的相互作用力为洛伦兹推迟力，在非相对论情况下带电的粒子间的推迟相互作用力由（9.4）式，或简化的（9.16）和（9.22）式描述。对于电中性的原子和分子，洛伦兹推迟力则由相应的电磁偶极矩和多极矩间的相互作用力表示。

2．一个由大量微观粒子组成的经典宏观统计系统可以用相空间归一化的系综几率密度分布函数$\rho = \rho(x_{i\sigma}, p_{i\sigma}, t)$来描述，物理量$u$在系综中的平均值为：

$$\bar{u} = \int u(x_{i\sigma}, p_{i\sigma}, t)\rho(x_{i\sigma}, p_{i\sigma}, t)\prod_{i=1}^{N}\prod_{\sigma=1}^{3} dx_{i\sigma}dp_{i\sigma} \tag{9.27}$$

以下从这两条基本假设出发，建立经典统计力学运动方程，在此基础上进一步讨论平衡态和非平衡态统计物理学问题。

3．经典统计物理学的基本动力学方程

考虑到洛伦兹推迟力后，利用（9.26）式，系综几率密度分布函数ρ对时间的变化率应为：

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i\sigma}\left[\frac{\partial\rho}{\partial x_{i\sigma}}\dot{x}_{i\sigma} + \frac{\partial\rho}{\partial p_{i\sigma}}\dot{p}_{i\sigma}\right] = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i\sigma}\left[\frac{\partial\rho}{\partial x_{i\sigma}}\frac{p_{i\sigma}}{m_i} + \frac{\partial\rho}{\partial p_{i\sigma}}\left(F_{i\sigma} + F_{ei\sigma} + F'_{i\sigma}\right)\right] \tag{9.28}$$

利用连续性方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i\sigma}\left[\frac{\partial(\rho\dot{x}_{i\sigma})}{\partial x_{i\sigma}} + \frac{\partial(\rho\dot{p}_{i\sigma})}{\partial p_{i\sigma}}\right] = 0 \tag{9.29}$$

又可将（9.28）写为：

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\sum_{i\sigma}\left(\frac{\partial\dot{x}_{i\sigma}}{\partial x_{i\sigma}} + \frac{\partial\dot{p}_{i\sigma}}{\partial p_{i\sigma}}\right) = -\rho\sum_{i\sigma}\frac{\partial F'_{i\sigma}}{\partial p_{i\sigma}} \tag{9.30}$$

可见几率密度不是一个常数，关于相体积不变的刘维定理不再成立。由此（8.28）式还可以写为：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i\sigma}\left[\frac{p_{i\sigma}}{m_i}\frac{\partial\rho}{\partial x_{i\sigma}} + \left(F_{i\sigma} + F_{ei\sigma} + F'_{i\sigma}\right)\frac{\partial\rho}{\partial p_{i\sigma}}\right] = -\rho\sum_{i\sigma}\frac{\partial F'_{i\sigma}}{\partial p_{i\sigma}} \tag{9.31}$$

上式就是考虑到推迟效应后修正后的刘维方程，当$F'_{i\sigma}$等于零时上式就变为目前统计物理学的刘维

方程。现有的刘维方程仅考虑保守力，对时间反演不变，实际上是不适合于用来描写非平衡统计系统的。由于 $F'_{i\sigma}$ 对时间反演不能保持不变，（9.31）式显然对时间反演也不能保持不变，表明宏观系统的演化过程是对时间反演不可逆的。（9.31）就是引入洛伦兹推迟力后，系综几率密度分布函数 ρ 满足的运动方程，可作为经典统计力学的基本运动方程，以下对此方程进行讨论。

4．平衡态统计分布

先讨论目前统计力学中平衡态的定义和等几率假设。在热力学中平衡态有较严格定义：平衡态是在外界没有影响的条件下，系统的宏观性质不随时间而变的状态。按这种定义平衡态可以和外界有接触，但二者在宏观上彼此不对对方产生影响，也就是说在平衡态过程中必须没有宏观流的存在。而在目前的统计物理学中，平衡态实际上没有独立意义上的严格定义。对于孤立系统，平衡态的定义依赖于等几率假设。等几率假设为：对于孤立系统的平衡态，相宇中能量曲面 E 和 $E+\Delta E$ 之间相等体积的几率相等，即 $\rho=$ 常数。因此统计物理学中孤立系统平衡态和等几率的状态是等价的，等几率的状态就是孤立系统的平衡态。有些文献认为可将一般统计系统的平衡态视为物理量对系统的统计平均不随时间而变的状态 (17)。但这种定义与等几率的定义可能存在不一致，因为可能存在这样的情况，即某种物理量在不是等几率分布情况下的统计平均也可能与时间无关。因此这样的定义可能是不合适的。对于非孤立系统平衡态，目前统计物理学中没有严格定义。

至于等几率假设，则是一个先验的假设，无法进行证明。其存在的理由与所谓的“无差别理由律”或“不充足理由律”有关，即如果没有理由认为几率不相等，就应该是几率相等。在统计力学建立的早期，等几率假设提出后就一直受到批评和责难，因为没有理由认为等能面上的每一点在物理上都能实现且具有相同的几率。波耳兹曼在建立统计物理学时使用过类似等几率的几率假设，在受到一些人的攻击后为了绕过这个假设，提出了各态历经假说，试图来为统计物理学奠定基础。各态历经假说认为：当力学体系从任一初始态开始运动后，只要时间足够长，所有在能量曲面上的一切微观运动状态都要经历。然而研究表明各态历经假说是不可能的，之后又有人提出准各态历经假说，认为当力学体系从任一初始态开始运动后，只要时间足够长，它的代表点就可以无限地接近所有在能量曲面上的任何点。但这种理论也存在许多问题 (14)，仍不能解决统计物理学的基础问题。

可见为解决统计物理学的基础问题，需要寻找其他出路，采用修正后的刘维方程就能很好地解决这个问题。首先我们将统计物理学的平衡态定义为：系综几率密度不随时间变化的状态。因此系统达到平衡时就有 $d\rho/dt=0$ 和 $\partial\rho/\partial t=0$。$d\rho/dt=0$ 表示系统的几率密度分布函数不随时间而变，而 $\partial\rho/\partial t=0$ 则表示 ρ 不显含时间。于是按（9.31）式，一个系统达到平衡态的条件为：

$$\sum_{i\sigma}\frac{\partial F'_{i\sigma}}{\partial p_{i\sigma}}=0 \qquad \text{和} \qquad \sum_{i\sigma}\left[\frac{p_{i\sigma}}{m_i}\frac{\partial\rho}{\partial x_{i\sigma}}+\left(F_{i\sigma}+F'_{i\sigma}\right)\frac{\partial\rho}{\partial p_{i\sigma}}\right]=0 \tag{9.32}$$

只要满足以上两个约束条件，按（46）式不同相空间点几率密度不随时间而变，没有几率流存在，就可以视为平衡态。但平衡态系统中不同的相空间点上的几率密度仍可以是 $x_{i\sigma}$ 和 $p_{i\sigma}$ 的函数，也就是说平衡态并不要求是等几率的。注意按这种定义，平衡态系统中的微观粒子可以受到外力的作用，但外力不使系统的几率分布产生随时间而发生的变化，如在重力场作用下大气分子密度的稳定态梯度分布。因此这种平衡态的统计学定义与热力学定义也是一致的。注意到在现有统计理论中不考虑推迟相互作用力，就有 $F'_{i\sigma}=0$。此时不论系统是否处于平衡态，按（45）式我们都有 $d\rho/dt=0$，

这就是为何现有统计理论必须将平衡态视为等几率态的原因。

对于孤立系统，粒子不受外力作用，但仍可有以下多种形式的平衡态：

1．系统中粒子不受力，$\vec{F}_i=\vec{F}_{ei}=\vec{F}_i'=0$，且满足 $\partial\rho/\partial x_{i\sigma}=0$ 和 $\partial\rho/\partial p_{i\sigma}=0$。此时系综几率分布函数 $\rho=$ 常数，ρ 与 $x_{i\sigma}$，$p_{i\sigma}$ 和 t 都无关。这种平衡态是等几率的平衡态，也就是现有统计理论的微正则系综。

2．粒子只受保守力的作用，$\vec{F}_i\neq 0$，$\vec{F}_{ei}=\vec{F}_i'=0$，但 $\partial\rho/\partial x_{i\sigma}\neq 0$，$\partial\rho/\partial p_{i\sigma}\neq 0$，则：

$$\sum_{i\sigma}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_{i\sigma}}\frac{p_{i\sigma}}{m_i}+\frac{\partial\rho}{\partial p_{i\sigma}}F_{i\sigma}\right)=\sum_{i\sigma}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_{i\sigma}}\frac{\partial H_0}{\partial p_{i\sigma}}-\frac{\partial\rho}{\partial p_{i\sigma}}\frac{\partial H_0}{\partial x_{i\sigma}}\right)=0 \tag{9.33}$$

上式最简单的解为：

$$\rho=\rho_0 e^{-\beta E}=e^{-\psi-\beta E} \tag{9.34}$$

式中 $E=H_0=$ 常数，是保守系统的总能量。$\rho_0=e^{-\psi}$，ψ 是常数，有：

$$\frac{\partial\rho}{\partial x_{i\sigma}}=-\beta\rho\frac{\partial E}{\partial x_{i\sigma}} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial p_{i\sigma}}=-\beta\rho\frac{\partial E}{\partial p_{i\sigma}} \tag{9.35}$$

代入（9.33）式就可以验证（9.34）式是其解，而（9.34）式则是经典统计理论中的平衡态正则系综。

再假设系统中的粒子是全同的，且每个粒子受到的力仅与自身的坐标有关，与其他粒子的坐标无关。此时各个粒子是独立的，彼此之间没有相互作用，则 $E=\sum_i E_i$，$E_i=T_i+U_i$，T_i 是粒子的动能，U_i 是粒子的势能。（9.34）式就变为：

$$\rho(\vec{x}_1,\vec{p}_1\cdots\vec{x}_i,\vec{p}_i\cdots\vec{x}_N,\vec{p}_N)=\rho_0 e^{-\beta(E_1+\cdots E_i+\cdots+E_N)}=\rho_0 e^{-\beta E_1}\cdots e^{-\beta E_i}\cdots e^{-\beta E_N} \tag{9.36}$$

上式就是近独立子系统的分布。将上式对整个相空间积分，考虑到 ρ 是归一化的，就有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho d\Omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_0^{1/N}e^{-\beta E_1}d\Omega_1\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_0^{1/N}e^{-\beta E_i}d\Omega_i\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_0^{1/N}e^{-\beta E_N}d\Omega_N=1 \tag{9.37}$$

由于是全同粒子，能量 E_i 的形式完全一样，上式可以写为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho d\Omega=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_0^{1/N}e^{-\beta E_i}d\Omega_i\right)^N=1 \qquad \text{或} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\rho_0^{1/N}e^{-\beta E_i}d\Omega_i=1 \tag{9.38}$$

令 $\rho_0^{1/N}=e^{-\alpha}$，上式可以写成求和的形式：

$$\sum_i f_i\Delta\Omega_i=\sum_i e^{-\alpha-\beta E_i}\Delta\Omega_i=1 \qquad f_i(\vec{x}_i,\vec{p}_i)=e^{-\alpha-\beta E_i} \tag{9.39}$$

上式就是麦克斯韦——波耳兹曼分布或最可几分布。

对于自由粒子，$U_i=0$，令 $E_i\to mv^2/2$，上式就变成麦克斯韦速度分布：

$$fd\Omega=Be^{-\frac{mv^2}{2KT}}dxdydzdv_xdv_ydv_z \tag{9.40}$$

式中 $KT=1/\beta$，$B=e^{-\alpha}$。此时分布函数与空间坐标无关，表示粒子在空间中的分布是均匀的。若系统中所有粒子的运动速率都一样，按（9.40）式，速度分布函数 $f=$ 常数，此时的系统就是微正则系综。可见微正则系综表示的是在空间均匀分布，并以单一速率运动的自由粒子组成的系统，这样

的系统实际上并无大的意义。

另外假设有两个系统，粒子数分别为 N_1 和 N_2，能量为 E_1 和 E_2。在 $N_1 >> N_2$， $E_1 >> E_2$ 时，按现有统计理论的方法，也能从正则系综得到巨正则系综。

可见按以上方式，我们可以从正则系综导出经典平衡态理论的各种分布函数，包括微正则系综。但从微正则系综却不能导出正则系综，这与传统平衡态统计理论正好相反。按传统理论，微正则系综是平衡态理论的基础，正则系综由微正则系综导出，代表的是与大热源接触的小系统的平衡态。可见在传统理论中，正则系综描述的是非孤立系统的平衡态。而按本文，在外力为零的条件下，我们从刘维方程导出（9.34）式，此时的系统是孤立系统。按现有统计理论，孤立系统平衡态的几率分布为常数。但按修正后的理论，微正则系综只是孤立系统的一种平衡态，大部分孤立系统平衡态的几率分布都不是常数。因此将微正则系综做为平衡态理论的基础是不合适的，对于只受保守力作用的孤立平衡系统，正则系综是更基本的。对于一般的统计系统，修正后的刘维方程是最基本的。我们应直接从修正后的刘维方程出发，来处理平衡态问题。无论在物理概念上还是在数学上，这种理论都比建立在微正则系综假设基础上的平衡态理论更为简单、明确和合理。

可见我们不需要引入等几率之类的假设来为平衡态统计物理学提供基础。只要直接从微观带电粒子推迟相互作用加上系综假设，我们就能完全解决统计力学的问题。将微观粒子电磁推迟相互作用与系综假设结合，就得到修正的刘维方程。不论平衡态统计力学还是非平衡态统计力学，有了修正的刘维方程后在原则上就足够了。目前在统计力学基础问题的研究中也常讨论混沌理论，并试图通过混沌理论来解决统计物理学的基本问题。混沌理论可能与统计系统的随机性来源，或者说与系综假设有关，但不对统计力学的基本运动方程的形式产生影响，实际上也与不可逆性的来源无关。我们不可能在保守力的基础上，通过建立混沌理论来解决宏观系统演化的不可逆性问题，因此也就不可能通过混沌理论来解决统计力学的基本问题。从修正后的刘维方程出发，可以避免容易引起争议的各态历经、粗粒化等问题，使非平衡态统计物理与平衡态统计物理的描述变得合理，达到统一。

5．BBGKY 序列方程

以下讨论 BBGKY 序列方程。将第 i 粒子在相空间中的相体积元写为 $d\Omega_i = \prod_{\sigma=1}^{3} dx_{i\sigma} dp_{i\sigma}$，约化系综几率密度分布函数写为：

$$f_S(x_{1\sigma}, p_{1\sigma} \cdots x_{S\sigma}, p_{S\sigma}, t) = \int \rho(x_{1\sigma}, p_{1\sigma} \cdots x_{N\sigma}, p_{N\sigma}, t) d\Omega_{S+1} \cdots d\Omega_N \tag{9.41}$$

按目前的理论，利用上式的定义和全同粒子的性质，可以得到 BBGKY 序列方程：

$$\frac{\partial f_S}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{3}\sum_{i=1}^{S}\left(\frac{p_{i\sigma}}{m_i}\frac{\partial f_S}{\partial x_{i\sigma}} + F_{ei\sigma}\frac{\partial f_S}{\partial p_{i\sigma}}\right) - \sum_{\sigma=1}^{3}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j\neq i}^{S} F_{ij\sigma}\frac{\partial f_S}{\partial p_{i\sigma}}$$

$$+ (N-S)\sum_{\sigma=1}^{3}\sum_{i=1}^{S}\int F_{iS+1\sigma}\frac{\partial f_{S+1}}{\partial p_{i\sigma}} d\Omega_{S+1} = 0 \tag{9.42}$$

它与刘维方程完全等价。引入洛伦兹推迟力后，将（9.31）式对 $d\Omega_{S+1} \cdots d\Omega_N$ 积分后可得相应的 BBGKY 序列方程：

$$\frac{\partial f_S}{\partial t}+\sum_{\sigma=1}^{3}\sum_{i=1}^{S}\left(\frac{p_{i\sigma}}{m_i}\frac{\partial f_S}{\partial x_{i\sigma}}+F_{ei\sigma}\frac{\partial f_S}{\partial p_{i\sigma}}\right)+\sum_{\sigma=1}^{3}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j\neq i}^{S}\left(F_{ij\sigma}+F'_{ij\sigma}\right)\frac{\partial f_S}{\partial p_{i\sigma}}$$

$$+(N-S)\sum_{\sigma=1}^{3}\sum_{i=1}^{S}\int\left(F_{iS+1\sigma}+F'_{iS+1\sigma}\right)\frac{\partial f_{S+1}}{\partial p_{i\sigma}}d\Omega_{S+1}=0 \quad (9.43)$$

其中 $F_{ei\sigma}$ 只与 i 粒子的空间坐标和时间有关，与 j 粒子的空间坐标无关。而 $F_{ij\sigma}$ 和 $F'_{ij\sigma}$ 和除与 i 粒子的相空间坐标有关外，还与 j 粒子的相空间坐标有关。 $F_{iS+1,\sigma}$ 和 $F'_{iS+1,\sigma}$ 表示 $j=S+1$ 的项。考虑到 $N-1\approx N$，上式中 $S=1$ 的第一个方程为：

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\bar{p}_1}{m}\cdot\nabla_{\bar{r}_1}f_1+\bar{F}_{e1}\cdot\nabla_{\bar{p}_1}f_1+N\int\bar{F}_{12}\cdot\nabla_{\bar{p}_1}f_2d^3\bar{r}_2d^3\bar{p}_2=-N\int\bar{F}'_{12}\cdot\nabla_{\bar{p}_1}f_2d^3\bar{r}_2d^3\bar{p}_2 \quad (9.44)$$

式中 $\bar{F}_{12}$ 和 $\bar{F}'_{12}$ 由（9.22）确定。类似地，BBGKY 系列的第二个方程是：

$$\frac{\partial f_2}{\partial t}+\frac{\bar{p}_1}{m}\cdot\nabla_{\bar{r}_1}f_2+\frac{\bar{p}_2}{m}\cdot\nabla_{\bar{r}_2}f_2+\bar{F}_{e1}\cdot\nabla_{\bar{p}_1}f_2+\bar{F}_{e2}\cdot\nabla_{\bar{p}_2}f_2+\bar{F}_{12}\cdot\nabla_{\bar{p}_1}f_2$$

$$+\bar{F}_{21}\cdot\nabla_{\bar{p}_2}f_2+N\int\left(\bar{F}_{13}\cdot\nabla_{\bar{p}_1}f_3+\bar{F}_{23}\cdot\nabla_{\bar{p}_2}f_3\right)d^3\bar{r}_3d^3\bar{p}_3$$

$$=-\bar{F}'_{12}\cdot\nabla_{\bar{p}_1}f_2-\bar{F}'_{21}\cdot\nabla_{\bar{p}_2}f_2-N\int\left(\bar{F}'_{13}\cdot\nabla_{\bar{p}_1}f_3+\bar{F}'_{23}\cdot\nabla_{\bar{p}_2}f_3\right)d^3\bar{r}_3d^3\bar{p}_3 \quad (9.45)$$

以上两式等号左边的项是现有刘维方程的结果，右边是引入洛伦兹推迟力后的修正结果，以下用它们来讨论流体力学方程的修正。

6．流体力学方程

如何从统计力学的角度导出流体力学方程，这是在目前的统计力学中尚未很好解决的问题。这是由于目前的统计力学建立在刘维方程的基础之上，实际上只能用来讨论保守系统的平衡态，或理想流体的力学问题。而宏观流体力学中存在的热传导，粘滞性等耗散现象，只有在引入非保守力的情况下才能合理解释。按本文引入洛伦兹推迟力后，就可以为将宏观流体力学中耗散现象的归根于微观起源。我们可以从（9.44）和（9.45）式出发来讨论问题流体力学问题，实际上只需将两式右边的项写成流体力学的形式，加到现有结果中去就得到修正的流体力学方程，以下进行讨论。

按现有理论，定义几率密度分布函数 $f_1(\bar{r}_1,\bar{p}_1,t)$ 和 $f_2(\bar{r}_1,\bar{p}_1,\bar{r}_2,\bar{p}_2,t)$ 的归一化形式为：

$$V_0=\int f_1(\bar{r}_1,\bar{p}_1,t)d^3\bar{r}_1d^3\bar{p}_1 \quad (9.46)$$

$$V_0^2=\int f_2(\bar{r}_1,\bar{p}_1,\bar{r}_2,\bar{p}_2,t)d^3\bar{r}_1d^3\bar{p}_1d^3\bar{r}_2d^3\bar{p}_2 \quad (9.47)$$

同样，宏观质量密度 ρ_0，流体速度 $\bar{V}$，动能密度 u_k 和势能密度 u_v 的定义分别为 (18)：

$$\rho_0(\bar{r}_1,t)=\frac{mN}{V_0}\int f_1(\bar{r}_1,\bar{p}_1,t)d^3\bar{p}_1 \quad (9.48)$$

$$\vec{V}(\vec{r}_1,t)=\frac{N}{\rho_0 V_0}\int \vec{p}_1 f_1(\vec{r}_1,\vec{p}_1,t)d^3\vec{p}_1 \tag{9.49}$$

$$u_k(\vec{r}_1,t)=\frac{N}{2m\rho_0 V_0}\int\left(\vec{p}-m\vec{V}\right)^2 f_1(\vec{r}_1,\vec{p}_1,t)d^3\vec{p}_1 \tag{9.50}$$

$$u_v(\vec{r}_1,t)=\frac{N^2}{2\rho_0 V_0^2}\int U(\vec{r}_1,\vec{r}_2)f_2(\vec{r}_1,\vec{p}_2,\vec{r}_2,\vec{p}_2,t)d^3\vec{p}_1 d^3\vec{r}_2 d^3\vec{p}_2 \tag{9.51}$$

先讨论质量密度平衡方程或连续方程。按（9.22）式，在仅考虑到v/c数量级的近似条件下，$\vec{F}'_{12}$只与$\vec{v}_2$有关，与$\vec{v}_1$无关，有$\nabla_{\vec{p}_1}\cdot\vec{F}'_{12}=0$，和$\vec{F}'_{12}\cdot\nabla_{\vec{p}_1}f_2=\nabla_{\vec{p}_1}\cdot\left(\vec{F}'_{12}f_2\right)-f_2\nabla_{\vec{p}_1}\cdot\vec{F}'_{12}=\nabla_{\vec{p}_1}\cdot\left(\vec{F}'_{12}f_2\right)$。再考虑到$\vec{F}_{e1}$和$\vec{F}_{12}$与$\vec{p}_1$无关，将（8.44）式乘上$mN/V_0$并对$d^3\vec{p}_1$积分，利用几率密度函数的边界条件，可知方程右边结果为零。得到的流体力学连续方程与目前理论的结果一样，为：

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho_0\vec{V}\right)=0 \tag{9.52}$$

为了得到流体力学运动方程，将（9.44）式乘上$N\vec{p}_1/V_0$并对$d^3\vec{p}_1$积分后，从方程左边得到现有理论的结果：

$$\rho_0\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right)+\nabla\cdot\left(\vec{\vec{P}}_k+\vec{\vec{P}}_v\right)=\rho_0\vec{\Gamma}_1 \tag{9.53}$$

式中$\vec{\Gamma}_1$为单位质量受到的平均外力，$\vec{\vec{P}}_k$和$\vec{\vec{P}}_v$为动能压强张量和势能压强张量[18]：

$$\vec{\Gamma}_1=\frac{N}{\rho_0 V_0}\int f_1\vec{F}_{e1}d^3\vec{p}_1 \qquad \vec{\vec{P}}_k=\frac{N}{V_0}\int f_1\frac{\left(\vec{p}_1-m\vec{V}\right)\left(\vec{p}_1-m\vec{V}\right)}{m}d^3\vec{p}_1 \tag{9 .54}$$

$$\vec{\vec{P}}_v=-\frac{1}{2}\left(\frac{N}{V_0}\right)^2\int_0^1 d\lambda\int\frac{\vec{r}''_{12}\vec{r}''_{12}}{r''_{12}}\frac{dU(r''_{12})}{dr''_{12}}d^3r''_{12}d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 \tag{9.55}$$

由于$\nabla_{\vec{p}_1}\cdot\vec{F}'_{12}=0$，$\nabla_{\vec{p}_1}\vec{p}_1=1$，令方程右边为：

$$\vec{\Gamma}_2=-\frac{N^2}{V_0}\int\vec{p}_1\vec{F}'_{12}\cdot\nabla_{\vec{p}_1}f_2 d^3\vec{p}_1 d^3\vec{r}_2 d^3\vec{p}_2=\frac{N^2}{V_0}\int f_2\vec{F}'_{12}d^3\vec{p}_1 d^3\vec{r}_2 d^3\vec{p}_2 \tag{9.56}$$

$\vec{\Gamma}_2$可称为单位质量受到的平均洛伦兹耗散力，经修正的流体力学运动方程就可以写为：

$$\rho_0\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right)+\nabla\cdot\left(\vec{\vec{P}}_k+\vec{\vec{P}}_v\right)=\rho_0\left(\vec{\Gamma}_1+\vec{\Gamma}_2\right) \tag{9.57}$$

将（9.44）式乘上$N\left(\vec{p}_1-m\vec{V}\right)^2/2mV_0$并对$d^3\vec{p}_1$积分，可得修正的动能平衡方程。从（9.44）式左边可得现有理论结果：

$$\frac{\partial(\rho_0 u_k)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho_0 u_k\vec{V}+\vec{J}_k\right)=-\vec{\vec{P}}_k:\nabla\vec{V} \tag{9.58}$$

式中$\vec{J}_k=\vec{J}_{k1}+\vec{J}_{k2}$，其中：

$$\vec{J}_{k1}=\frac{N}{V_0}\int\frac{\vec{p}\ \ -m\vec{V}}{m}\frac{\left(\vec{p}_1-m\vec{V}\right)^2}{2m}f_1d^3\vec{p}_1 \tag{9.59}$$

$$\vec{J}_{k2}=\int_0^1 d\lambda\int\frac{\vec{r}''_{12}\vec{r}''_{12}\cdot\left(\vec{p}_1-m\vec{V}\right)}{2mr''_{12}}\frac{dU\left(r''_{12}\right)}{dr''_{12}}\ f_2\left(\vec{r}_1+(1-\lambda)\vec{r}''_{12},\vec{p}_2,\vec{r}_1-\lambda\vec{r}''_{12},\vec{p}_2,t\right)d^3\vec{r}''_{12}d^3\vec{p}_1d^3\vec{p}_2 \tag{9.60}$$

从（9.44）式的右边可得修正项：

$$\rho_0\sigma_k=-\frac{N^2}{2mV_0}\int\left(\vec{p}_1-m\vec{V}\right)^2\nabla_{\vec{p}_1}\cdot\left(\vec{F}'_{12}f_2\right)\ d^3\vec{p}_1d^3\vec{r}_2d^3\vec{p}_2$$

$$=\frac{N^2}{mV_0}\int f_2\vec{F}'_{12}\cdot\left(\vec{p}_1-m\vec{V}\right)d^3\vec{p}_1d^3\vec{r}_2d^3\vec{p}_2 \tag{9.61}$$

σ_k 可称为单位质量耗散动能产生。故引入洛伦兹推迟力后，（9.58）式就应改写为：

$$\frac{\partial\left(\rho_0u_k\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho_0u_k\vec{V}+\vec{J}_k\right)=-\overset{\Rightarrow}{P}_k:\nabla\vec{V}+\rho_0\sigma_k \tag{9.62}$$

将（9.45）式所示的 BBGKY 链的第二个方程乘上 $N^2U\left(r_{12}\right)/V_0^2$，再对 $d^3\vec{p}_1d^3\vec{r}_2d^3\vec{p}_2$ 积分，同样可得势能平衡方程。从方程的左边得到保守的势能的流体力学平衡方程：

$$\frac{\partial\left(\rho_0u_v\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho_0u_v\vec{V}+\vec{J}_v\right)=-\overset{\Rightarrow}{P}_v:\nabla\vec{V} \tag{9.63}$$

式中 $\vec{J}_v=\vec{J}_{v1}+\vec{J}_{v2}$，其中：

$$\vec{J}_{v1}=\frac{1}{2}\left(\frac{N}{V_0}\right)^2\int\frac{\vec{p}-m\vec{V}}{m}U\left(r_{ij}\right)f_2d^3\vec{p}_1d^3\vec{r}_2d^3\vec{p}_2 \tag{9.64}$$

$$\vec{J}_{v2}=-\int_0^1 d\lambda\int\frac{\vec{r}''_{12}\vec{r}''_{12}\cdot\left(\vec{p}_1-\vec{p}_2\right)}{4mr''_{12}}\frac{dU\left(r''_{12}\right)}{dr''_{12}}\ f_2\left[\vec{r}_1+(1-\lambda)\vec{r}''_{12},\vec{p}_2,\vec{r}_1-\lambda\vec{r}''_{12},\vec{p}_2,t\right]d^3\vec{r}''_{12}d^3\vec{p}_1d^3\vec{p}_2 \tag{9.65}$$

方程右边的修正项是：

$$-\frac{N^2}{V_0^2}\int\left(\vec{F}'_{12}\nabla_{\vec{p}_1}+\vec{F}'_{21}\nabla_{\vec{p}_2}\right)f_2d^3\vec{p}_1d^3\vec{r}_2d^3\vec{p}_2$$

$$-\frac{N^3}{V_0^2}\int\left(\vec{F}'_{13}\cdot\nabla_{\vec{p}_1}+\vec{F}'_{23}\cdot\nabla_{\vec{p}_2}\right)f_3d^3\vec{p}_1d^3\vec{r}_2d^3\vec{p}_2d^3\vec{r}_3d^3\vec{p}_3 \tag{9.66}$$

如前所述，由于 $\nabla_{\vec{p}i}\cdot\vec{F}'_{ij}=0$，利用边界条件后可知以上两式积分均为零，也就是说引入洛伦兹推迟力后，势能项没有修正。当然我们还要考虑非保守的耗散能的贡献，但如（9.20）式所示，非保守的相互作用能最低阶与 v^2/c^2 成比例。因此采用（9.22）式的简化形式时，非保守的耗散能的贡献可以不予考虑。若考虑到 v^2/c^2 阶的修正，以上诸式还得增加相应的修正项。

利用以上结果加上本构方程和状态方程，就构成有耗散性的流体力学运动方程组，从而可以计算存在耗散性时的输运系数等，此问题留待以后讨论。

参考文献

13.苗东升，刘华杰，混沌学纵横论，人民大学出版社，262（1993）.

14.王竹溪，统计物理学导论，人民教育出版社，34，152（1965）.
15. Nuffield Advanced Level Physics, 295.
16．S.Chandrasekhar, Rev. Mod.Phys., 15，84 (1943).
17．王竹溪，热力学，高等教育出版社，19（1983）.
18.罗辽复，非平衡统计理论，内蒙古大学出版社，355,358，25（1990）.