电磁场规范变换的物理意义和$A-B$效应的本质

梅 晓 春

（福州原创物理研究所）

内容摘要 本文说明由于电磁场运动方程的不变性，电磁场规范变换群参数的形式实际上是不能任意的，电磁势的规范变换等于在原来的电磁势中叠加辐射场。只是由于辐射场的高频振荡使辐射场对宏观带电体的电磁相互作用力互相抵消，带宏观带电体无法对辐射场发生感应罢了。对于微观带电粒子，辐射场的存在是不可忽略。由此可以说明为什么量子理论中只能用电磁势A_μ，不能用电磁场强$\vec{E}$和$\vec{B}$来构造相互作用的原因。并能很好地阐明$A-B$效应的物理本质，指出$A-B$效应等现象本质上由几率波传播过程中的推迟效应引起，实际上不属于贝里相位。

1. 电磁场规范变换的物理本质

先讨论电磁规范变换的物理意义。在经典电磁理论中，有直接测量意义的是电场强度$\vec{E}$和磁场强度$\vec{B}$，它们与电磁势$\vec{A}$和φ之间的关系为：

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \qquad \vec{B}=\nabla\times\vec{A} \tag{4.1}$$

但电磁势$\vec{A}$和φ被认为是不确定的，没有直接的测量意义的。之所以说电磁势是不确定的，是由于我们可以引入任意函数（群参数θ），对电磁势进行规范变换：

$$\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\theta \qquad \varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\theta}{\partial t} \tag{4.2}$$

将上式代入（4.1）式可知$\vec{E}$和$\vec{B}$的形式不变。此结果似乎表明$\vec{A}$和φ的形式可以是任意的，不具有直接的测量意义，不对实际的物理系统产生直接的影响。然而 1959 年 Aharonov 和 Bohm 提出$A-B$效应[11]，以及其后的一系列实验彻底改变了这一看法。目前人们普遍认为在经典力学范围内电磁运动仍应由$\vec{E}$和$\vec{B}$确定。但在量子力学运动方程中，电磁势$\vec{A}$和φ对带电粒子的运动会产生影响。因此电磁势就不是一个只是为了理论处理方便而引入的工具，它具有真实的物理意义。但如何正确理解电磁势规范变换的任意性却有待于研究，因为一个有真实意义的物理量不可能是任意的。

以下我们将看到，只要正确理解电磁场的运动方程的解和规范变换的意义，电磁势的任意性问题实际上不存在。电磁势的规范变换实际上意味着改变系统中辐射场或光子场的强度，这并不是一个任意的行为。将（4.1）式代入电磁场的运动方程：

$$\nabla\cdot\vec{E}=4\pi\rho \qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \tag{4.3}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \qquad \nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}+\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{4.4}$$

可以得到四维电磁势$A_\mu=\left(\vec{A},i\varphi\right)$满足的运动方程：

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi\right)=-\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{4.5}$$

$$\nabla^2\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot A=-4\pi\rho \tag{4.6}$$

另外从数学上考虑，规范变换自由度的存在是由于在（4.1）式中只定义了 $\vec{A}$ 的旋度，没有定义 $\vec{A}$ 的散度。我们知道一个矢量的旋度是不足以确定矢量场的，为了确定矢量场 $\vec{A}$，我们还必须知道其散度 $\nabla\cdot\vec{A}$。由于电磁场 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的定义中没有对 $\vec{A}$ 的散度进行限制，原则上可以令 $\nabla\cdot\vec{A}$ 取任意值作为确定矢量场 $\vec{A}$ 的辅助条件[12]。每一种选择代表一种规范条件，以下先讨论洛伦兹规范条件：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varphi=0 \tag{4.7}$$

在洛伦兹规范条件下，四维电磁势 $A_\mu=\left(\vec{A},i\varphi\right)$的运动方程可以写成很对称的形式：

$$\nabla^2A_\mu-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_\mu=-\frac{4\pi}{c}j_\mu \qquad \text{或} \qquad \partial_\mu^2A_\mu=-\frac{4\pi}{c}j_\mu \tag{4.8}$$

式中 $j_\mu=\left(\vec{j},ic\rho\right)$是四维电流密度。当 $j_\mu=0$ 时（4.8）式变为齐次波动方程：

$$\nabla^2A_\mu-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_\mu=0 \qquad \text{或} \qquad \partial^2A_\mu=0 \tag{4.9}$$

上式描写的是在全空间都没有电荷与电流存在的情况下电磁场的运动方程。因此方程（4.8）式的一般解可以写为 $A_\mu\left(\vec{x},t\right)=A_\mu^a\left(\vec{x},t\right)+A_\mu^b\left(\vec{x},t\right)$，其中 A_μ^a 是与电流密度有关的特解：

$$A_\mu^a\left(\vec{x},t\right)=\int\frac{j_\mu\left(\vec{x}',t-r/c\right)}{cr}d^3\vec{x}' \tag{4.10}$$

式中 $r=\left|\vec{x}'-\vec{x}\right|$。从上式可知，洛伦兹条件 $\partial_\mu A_\mu^a=0$ 实际上代表电荷守恒 $\partial_\mu j_\mu=0$。而 A_μ^b 是满足齐次方程（4.9）式的通解，也可以说 A_μ^b 代表与电流密度无关的辐射场。在直角坐标系中，我们可将 A_μ^b 写为平面波叠加的形式：

$$A_\mu^b\left(\vec{x},t\right)=\sum_{j=1}^{N}\left[a_{j\mu}e^{i\left(\vec{k}_j\cdot\vec{x}-\omega_jt\right)}+b_{j\mu}e^{-i\left(\vec{k}_j\cdot\vec{x}-\omega_jt\right)}\right] \tag{4.11}$$

另外我们可以将规范变换（4.1）式写成协变形式 $A'_\mu=A_\mu+\partial_\mu\theta$。对运动方程（4.8）式进行规范变换，可以得到：

$$\partial^2A'_\mu=\partial^2A_\mu+\partial^2\partial_\mu\theta=-\frac{4\pi}{c}j_\mu \tag{4.12}$$

与（4.8）式比较，就得到：

$$\partial^2\partial_\mu\theta=0 \tag{4.13}$$

可见群参数 θ 的形式不能是任意的，必须受到的限制。令 $\partial_\mu\theta=A_\mu^c$，则限制条件为 $\partial^2A_\mu^c=0$。可见 A_μ^c 与 A_μ^b 满足相同的方程，故 A_μ^c 和 A_μ^b 一样，实际上代表辐射场场，规范变换就变为：

$$A'_\mu=A_\mu+A_\mu^c=A_\mu^a+A_\mu^b+A_\mu^c \tag{4.14}$$

因此电磁势的规范变换等于在原来的电磁势中叠加辐射场，使原来辐射场的密度发生改变。电磁场强度 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 在（4.2）式的变换下不变的意义是，辐射场对宏观电磁场强度不产生影响。因为按（4.11）式，A_μ^c 或 A_μ^b 可以看成不同频率不同位相的电磁波叠加，使得辐射场对宏观带电体的作用力互相抵消。也可以说辐射电磁场不同位相的高频振荡使宏观大质量带电体正负方向的作用力互相抵消，实际上无法发生感应。将（4.11）式代入（4.1）式，考虑到在规范变换下 $\vec{E}'=\vec{E}$，$\vec{B}'=\vec{B}$，可得：

$$\nabla \times \vec{A}^b = 0 \qquad\qquad \nabla A_4^b - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}^b = 0 \tag{4.15}$$

将（4.11）式代入以上两式，可得：

$$\sum_{j=1}^{N}\left[(a_{j2}-b_{j2})k_{j3}-(a_{j3}-b_{j3})k_{j2}\right]=0 \qquad \sum_{j=1}^{N}\left[(a_{j3}-b_{j3})k_{j1}-(a_{j1}-b_{j1})k_{j3}\right]=0 \tag{4.16}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left[(a_{j1}-b_{j1})k_{j2}-(a_{j2}-b_{j2})k_{j1}\right]=0 \qquad \sum_{j=1}^{N}\left[(a_{j4}-b_{j4})\vec{k}_j-(\vec{a}_j-\vec{b}_j)k_{j4}\right]=0 \tag{4.17}$$

因此只要系数 $a_{j\mu}$， $b_{j\mu}$ 和 k_μ 满足以上关系，就可以使（4.15）得到满足。

由此我们就可以知道为什么在量子理论中只能用电磁势 A_μ，不能用电磁场强度 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 来构造相互作用的原因。自量子力学诞生以来人们曾试图用电磁场强度 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 来构造相互作用理论，但总是不能成功。原因在于若用电磁场强度来构造相互作用理论，就忽略了辐射场 A_μ^b 的存在，有真实物理量丢失。而在微观条件下，辐射场对单个微观带粒子的相互作用是不能忽略的。因此电磁势是一个有真实意义的物理量，不存在任意性。规范变换等于在原来的电磁势中叠加辐射场，而加入辐射场并不是一种任意的行为。

以下继续讨论取库仑规范 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 时电磁势运动方程的规范变换。此时（4.5）、（4.6）式变为：

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad\qquad \nabla^2\varphi = -4\pi\rho \tag{4.18}$$

在既没有电荷，也没有电流存在的空间中，上式变为：

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi = 0 \qquad\qquad \nabla^2\varphi = 0 \tag{4.19}$$

若整个空间都没有电荷分布，可以令库仑场的标势 $\varphi = 0$，得到：

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = 0 \tag{4.20}$$

上式是自由电磁波的运动方程，与采用洛伦兹规范条件时得到的（4.9）式是一致的，其解为：

$$\vec{A} \sim \vec{A}_j e^{i(\vec{k}_j\cdot\vec{x}-\omega_j t)} \tag{4.21}$$

从库仑规范条件 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 可以得到 $\vec{k}_j \cdot \vec{A}_j = 0$，表明由库仑规范确定的磁势只有横向分量，刚好足够描述辐射电磁波的两个独立偏振。事实上从量子场论中我们知道，采用洛伦兹规范条件时也要假设四维磁势第三、四分量算符之和的真空期望值为零，表明只存在横向光子。结果说明实际物理过程的描述与规范条件的选择无关，不论采用什么规范条件，用来描述真实过程的理论必须达到一致。令 $\varphi = 0$， $\nabla\theta = \vec{A}^b$，在库仑规范条件下对（4.18）式进行规范变换，令 $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{A}^b$，从：

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{4.22}$$

得：

$$\nabla^2 \vec{A}^b - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}^b = 0 \tag{4.23}$$

上式与（4.20）式的形式完全一样的。因此可以说在库仑规范条件下，规范变换 $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\theta$ 也等

价于在原来的电磁势中叠加辐射场。同样说明规范变换不是一种任意的行为，电磁势应当被认为是有真实意义的物理量。因此电磁势的任意性实际上来自其散度的不确定性（或规范条件的不确定性，比如我们即可选择洛伦兹规范条件，也可以选择库仑规范条件），而不是来自规范变换的不确定性。

2．A—B 效应的本质

以下证明$A-B$效应不是由贝里相位引起。贝里在 1984 年指出，量子力学的非简并绝热过程存在一个与时间有关的可以测量的相位[13]，之后有许多实验证明了贝里位相的存在。贝里认为波函数的时间依赖关系可以由参数$\vec{R}(t)$确定，可将本征态写为$|n,R(t)\rangle$，求得：

$$\gamma_n(t)-\gamma_n(0)=i\int_0^t\left\langle n,\vec{R}(t')\right|\frac{\partial}{\partial t}\left|n,\vec{R}(t')\right\rangle dt'=i\int_0^t\left\langle n,\vec{R}(t')\right|\nabla_{\vec{R}}\left|n,\vec{R}(t')\right\rangle\cdot\dot{\vec{R}}(t')dt' \tag{4.24}$$

设参数$\vec{R}(t)$经历一个循环过程的时间为T，选取$\gamma_n(0)=0$，对于绝热过程当$\vec{R}(T)=\vec{R}(0)$时就会产生一个贝里位相：

$$\gamma_n(T)=i\oint_C\left\langle n,\vec{R}(t)\right|\nabla_{\vec{R}}\left|n,\vec{R}(t)\right\rangle\cdot d\vec{R} \tag{4.25}$$

可以看出贝里位相与空间坐标无关，是一种整体效应。对于任意空间点，波函数在参数$\vec{R}(t)$经历一个循环过程后产生的位相都是一样的。目前许多文献都认为，只要在上式中令$\vec{R}(t)=\vec{x}(t)$和：

$$\vec{A}(\vec{x})=-\frac{i\hbar c}{e}\left\langle n,\vec{R}\right|\nabla_{\vec{R}}\left|n,\vec{R}\right\rangle \tag{4.26}$$

就可以用（4.25）是来描写$A-B$效应，因而就认为$A-B$效应是由贝里相位引起，然而这实际上是不可能的。首先在$A-B$效应的实验中，磁势$\vec{A}(\vec{x})$与时间无关，不存在对时间依赖的动力学参数$\vec{R}(t)$。其次令$\vec{R}(t)=\vec{x}(t)$也是不可能的，因为在几率波$\psi(\vec{x},t)$的描述中，时空坐标$\vec{x}$和t时互相独立的，我们不可能有$\vec{x}=\vec{x}(t)$这样的时空坐标依赖关系，这在量子力学中是行不通的。因此对$A-B$效应我们就不可能有（4.24）式，定义贝里相位的参数空间不可能是坐标空间。可以指出的是，$A-B$效应实际上由几率波的推迟相位引起，而几率波推迟相位是包含在本征态波函数中的。这与贝里相位不一样，贝里相位是与本征态波函数无关的相位，以下进行讨论。

狄拉克 1931 年讨论了电荷为e的粒子在磁场$\vec{A}(\vec{x})$中的运动，运动方程为：

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t}=\hat{H}\psi=\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla-\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x})\right)^2\psi(\vec{x},t) \tag{4.27}$$

方程的解为：

$$\psi(\vec{x},t)=\psi_0(\vec{x})exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t Edt\right)\qquad\qquad \psi_0(\vec{x})=C\,exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}}\left(\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A}\right)\cdot d\vec{x}'\right] \tag{4.28}$$

将（4.28）式代入（4.27）式，可得本征方程：

$$\hat{H}\psi_0(\vec{x})=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\frac{ie\hbar}{mc}\vec{A}\cdot\nabla+\frac{ie\hbar}{2mc}\nabla\cdot\vec{A}+\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2\right)\psi_0(\vec{x})=E\psi_0(\vec{x}) \tag{4.29}$$

从上式可以求得粒子能量仍为$E=\vec{p}^2/2m$，可见加入磁势后不改变自由粒子的能量。对于绝热过程，$t=0$时系统处于本征态$\psi_0(\vec{x})$，在任意$t=0$时刻系统处于$\psi(\vec{x},t)$态，二者相差一个含时因子

$exp(-iEt/\hbar)$。而我们实际上是用本征态$\psi_0(\vec{x})$来计算$A-B$效应的，它与贝里相位无关，因为贝里相位是独立于本征态的。实际上在自由粒子波函数$\psi(\vec{x},t)=C\,exp\,i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar$中，因子$\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar$是几率波传播过程的推迟相位，由于自由粒子的$\vec{p}$是常数，此相位仅与始末态位置有关，与几率波传播的路径无关。加入磁势后改变了几率波的位相，产生的额外位相为：

$$\theta_1(\vec{x})-\theta_1(\vec{x}_0)=\frac{e}{\hbar c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}}\vec{A}(\vec{x}')\cdot d\vec{x}' \qquad (4.30)$$

上式实际上是几率波传播过程中，由于磁势的存在额外引起的推迟位相，这个位相与几率波传播过程的路径有关。两束这样的几率波沿不同的路径运动，并在空间某点相叠加时，产生的位相差会形成干涉。令$\theta_1(\vec{x}_0)=0$，设Φ是磁通，当几率波沿某闭合路径运动一周回到$\vec{x}_0$时，就有：

$$\theta_1(\vec{x}_0,C)=\frac{e}{\hbar c}\oint_C\vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x}=\frac{e}{\hbar c}\oint_C\nabla\times\vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{S}=\frac{e}{\hbar c}\oint_C\vec{B}(\vec{x})\cdot d\vec{S}=\frac{e}{\hbar c}\Phi \qquad (4.31)$$

因此即使令$\vec{R}=\vec{x}$，按（4.28）式可得：

$$\frac{i\hbar c}{e}\langle n,\vec{R}|\nabla_{\vec{x}}|n,\vec{R}\rangle=-\langle n,\vec{R}|\left(\frac{c\vec{p}}{e}+\vec{A}(\vec{x})\right)|n,\vec{R}\rangle\neq\vec{A}(\vec{x}) \qquad (4.32)$$

可见（4.26）式不成立。因此$A-B$效应实际上是由几率波传播过程中产生的推迟位相引起，与贝里相位无关。还有其他一些过去被认为是贝里相位效应的现象，其实也是几率波传播过程中产生的推迟相位，如 Aharonov—Carmi 效应和 Aharonov—Casher 效应等，以下对此进行分析。

1. Aharonov—Carmi 效应 (14)

1973 年 Y. Aharonov 和 G. Carmi 提出惯性力矢量势的几何效应问题。在一个相对于惯性参考系以恒角速度转动的参考系上，粒子受到惯性力和科里奥利力$\vec{F}_2=-2m\vec{\omega}\times\vec{v}$的作用。引入惯性矢量势$\vec{a}$和标量势$a_0$，可以将哈密顿量写为：

$$H=\frac{1}{2m}(\vec{p}-2m\vec{a})^2+ma_0 \qquad (4.33)$$

显然与$A-B$效应完全相似，解运动方程可得几率波：

$$\psi(\vec{x},t)=\varphi(\vec{x},t)exp\left(i\frac{2m}{\hbar}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}}\vec{a}\cdot d\vec{x}\right) \qquad (4.34)$$

产生的相位差为：

$$\Delta\theta=\frac{2m}{\hbar}\oint_C\vec{a}\cdot d\vec{l}=\frac{2m}{\hbar}\vec{\omega}\cdot\vec{S} \qquad (4.35)$$

可用两束热中子在地球转动引力场中进行的干涉实验来验证上式 (14)，式中S是两中子束运动路径形成的面积。显然由于哈密顿量只是坐标的函数与时间无关，此相位差由几率波的推迟效应引起，与贝里相位无关。

2. Aharonov—Casher 效应 (15)

1984 年 Y. Aharonov 和 A. Casher 提出有磁矩的电中性粒子不受电磁力的作用，仅在电磁势的作用下产生的相位。设中性磁子的磁矩为$\vec{\mu}$，电偶极矩为$\vec{P}=\vec{v}\times\vec{\mu}/c$，$\vec{E}$为电场强度，哈密顿量为：

$$H=\frac{1}{2m}\left(\vec{P}-\frac{1}{c}\vec{\mu}\times\vec{E}\right)^2 \tag{4.36}$$

结果也与$A-B$效应相似，解运动方程可得几率波：

$$\psi(\vec{x},t)=\varphi(\vec{x},t)exp\left(\frac{i}{c\hbar}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}}(\vec{\mu}\times\vec{E})\cdot d\vec{x}\right) \tag{4.37}$$

用两束电中性粒子波在场中进行干涉实验，产生的相位差为：

$$\Delta\theta=\frac{1}{c\hbar}\oint_C(\vec{\mu}\times\vec{E})\cdot d\vec{x} \tag{4.38}$$

同样由于哈密顿量与时间无关，此相位差由几率波的推迟效应引起，也与贝里相位无关。

在量子力学中，过去人们总认为波函数的相位是不可观察的。贝里相位的出现改变了人们的看法，但目前对几率波推迟相位的作用还认识不足。事实上对于一般的量子力学绝热过程，我们总可以将几率波函数写为：

$$\psi(\vec{x},t)=\psi_n(\vec{x},t)exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_*}^{t}E_n(t')dt'\right) \qquad \psi_n(\vec{x},t)=\varphi_n(\vec{x},t)exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}}\vec{Q}(\vec{x},t)\cdot d\vec{x}\right) \tag{4.39}$$

其中$\varphi_n(\vec{x},t)$和$\vec{Q}(\vec{x},t)$是实数，因此本征态$\psi_n(\vec{x},t)$中所有的相位都包含在指数的积分中。令：

$$\theta_1(\vec{x},t)-\theta_1(\vec{x}_0,t)=\frac{1}{\hbar}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}}\vec{Q}(\vec{x}',t)\cdot d\vec{x}' \tag{4.40}$$

上式表示绝热过程在t时刻空间$\vec{x}_0$和$\vec{x}$两点间几率波的相位差，此相位差与时间有关。若设$t=0$时$\theta_1(\vec{x},0)=\theta_1(\vec{x}_0,0)$，上式就表示几率波在$t=0$时刻$\vec{x}_0$点的波动经过$t$时间绝热传到$\vec{x}$点时产生的推迟相位差。此相位差一般与积分路径有关，具有不可积性。可以将上式在时间间隔T内进行统计平均，将相位差写为：

$$\Delta\theta=\theta_1(\vec{x})-\theta_1(\vec{x}_0)=\frac{1}{\hbar T}\int_0^T\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}}\vec{Q}(\vec{x}',t)\cdot d\vec{x}'dt \tag{4.41}$$

若$\vec{Q}$与时间无关时，$\partial Q_i/\partial x_k-\partial Q_k/\partial x_i\neq 0$，则几率波在时间$T$内沿闭合回路运动一周，产生的推迟相位差就是：

$$\Delta\theta=\frac{1}{\hbar}\oint_C\vec{Q}(\vec{x})\cdot d\vec{x}=\frac{1}{\hbar}\oint_C\nabla\times\vec{Q}(\vec{x})\cdot d\vec{S} \tag{4.42}$$

因此对于量子力学绝热过程，一般总存在几率波的推迟相位。这种推迟相位一般与几率波传播的路径有关，属于不可积相位。若当两束这样的几率波沿不同的路径运动后进行叠加时，就会形成干涉。虽然按（4.28）式我们有$\psi^*\psi=\varphi_n^*\varphi_n$，即几率波推迟相位的存在对几率密度不产生影响。

参考文献：

13. Berry M. V., Proc. Roy. Sco. London, A392, 45 (1984).

14. Aharonov Y., Carmi G. Found.Phys, 3, 493 (1973).

15. Werner S.A., Standenmann J. L., Clella R. Phys. Rev. Lett., 42, 1103(1979). Aharonov Y. Casher A.

Phys. Rev. Lett. 53, 319 (1984).