电磁推迟相互作用的量子力学表示与带电粒子散射过程的时间反演对称性破坏

梅 晓 春

（福州原创物理研究所）

内容摘要 本文给出电磁推迟相互作用非相对论量子力学算符表示，证明考虑到电磁推迟相互作用后，电粒子电磁相互作用哈密顿顿量对时间反演是不对称的，因此带电粒子间散射过程破坏时间反演对称性。只是由于时间反演对称性破坏发生在三阶过程，不对称效应太小以至于按现有的实验精度难以观察到。

1．电磁推迟相互作用的量子力学表示

首先给出电磁推迟相互作用的非相对论量子力学算符表示式。我们用带撇的量表示推迟量，考虑到推迟时间相互作用后，一个电荷为 q_j 在 t' 时刻位于空间 $\vec{r}_j'(t')$ 处以速度 $\vec{v}_j'(t')$ 运动的 j 粒子，在 t 时刻于空间 $\vec{r}_i(t)$ 处产生的电磁推迟势为李纳-谢维尔势：

$$\varphi_{ij}=\frac{q_j}{\left(1-\vec{v}_j'\cdot\vec{n}_{ij}'/c\right)r_{ij}'} \qquad \vec{A}_{ij}=\frac{q_j\vec{v}_j'}{c\left(1-\vec{v}_j'\cdot\vec{n}_{ij}'/c\right)r_{ij}'} \tag{7.1}$$

式中 $\vec{r}_{ij}'(t,t')=\vec{r}_i(t)-\vec{r}_j'(t')$，$r_{ij}'=\left|\vec{r}_{ij}'\right|$，$\vec{n}_{ij}'=\vec{r}_{ij}'/r_{ij}'$。当粒子的速度 $v_j'<<c$ 时,可以近似地将 t' 中的 $r_{ij}'(t')$ 用 $r_{ij}(t)$ 来代替，即令：

$$t'=t-r_{ij}'(t')/c\to t-r_{ij}(t)/c \tag{7.2}$$

得：
$$r_{ij}'(t,t')=\left|\vec{r}_i(t)-\vec{r}_j'(t')\right|=\left|\vec{r}_i(t)-\vec{r}_j'\left[\,t-r_{ij}'(t')/c\right]\right|\to\left|\vec{r}_i(t)-\vec{r}_j'\left[\,t-r_{ij}(t)/c\right]\right|=r_{ij}'(t) \tag{7.3}$$

此时可按小量 r_{ij}/c 将推迟量展开成级数，令 $\vec{a}_j$ 和 $\dot{\vec{a}}_j$ 为 j 粒子在 t' 时刻的加速度和加加速度，以及 $v_{jn}'=\vec{v}_j'\cdot\vec{n}_{ij}'$，$a_{jn}'=\vec{a}_j'\cdot\vec{n}_{ij}'$，保留到 c^{-3} 的量级（以下将证明只有到 c^{-3} 的量级才会出现时间反演对称性破坏），可以得到[8]：

$$\vec{r}_{ij}'(t,t')=\vec{r}_{ij}(t)+\frac{r_{ij}(t)}{c}\vec{v}_j(t)-\frac{r_{ij}^2(t)}{2c^2}\vec{a}_j+\frac{r_{ij}^3(t)}{6c^3}\dot{\vec{a}}_j+\cdots \tag{7.4}$$

$$r_{ij}'(t')=r_{ij}\left\{1+\frac{v_{jn}}{c}-\frac{a_{jn}r_{ij}}{2c^2}+\frac{v_j^2}{2c^2}+\frac{\dot{a}_{jn}r_{ij}^2}{6c^3}-\frac{\vec{v}_j\cdot\vec{a}_jr_{ij}}{2c^3}+\cdots\right\} \tag{7.5}$$

$$\vec{v}_j'(t')=\vec{v}_j(t)-\frac{r_{ij}(t)}{c}\vec{a}_j(t)+\frac{r_{ij}^2(t)}{2c^2}\dot{\vec{a}}_j(t)-\frac{r_{ij}^3(t)}{6c^3}\ddot{\vec{a}}_j(t)+\cdots \tag{7.6}$$

利用以上各式，可将推迟势（7.1）式在 $v_j'<<c$ 的条件下用非推迟量来近似地表示为：

$$\varphi_{ij}=\frac{q_j}{r_{ij}}\left\{1+\frac{v_{jn}^2}{c^2}-\frac{v_j^2}{2c^2}+\frac{a_{jn}r_{ij}}{2c^2}+\frac{v_{jn}v_j^2}{2c^3}-\frac{v_{jn}a_{jn}r_{ij}}{2c^3}+\frac{\vec{a}_j\cdot\vec{v}_j r_{ij}}{2c^3}-\frac{\dot{a}_{jn}r_{ij}^2}{6c^3}+\cdots\right\} \tag{7.7}$$

$$\vec{A}_{ij}=\frac{q_j}{r_{ij}}\left\{\left(1+\frac{v_{jn}^2}{c^2}-\frac{v_j^2}{2c^2}+\frac{a_{jn}r_{ij}}{2c^2}+\cdots\right)\frac{\vec{v}_j}{c}-\frac{\vec{a}_j r_{ij}}{c^2}+\frac{\dot{\vec{a}}_j r_{ij}^2}{2c^3}\cdots\right\} \tag{7.8}$$

因此一个带电荷 q_j 以速度 $\vec{v}_j$ 运动的 j 粒子产生的场对一个带电荷 q_i，以速度 $\vec{v}_i$ 运动的 i 粒子的电磁相互作用能为：

$$U_{ij}=q_i\left(\varphi_{ij}+\vec{A}_{ij}\cdot\frac{\vec{v}_i}{c}\right)=\frac{q_iq_j}{r_{ij}}\left\{1+\frac{v_{jn}^2}{c^2}-\frac{v_j^2}{2c^2}+\frac{a_{jn}r_{ij}}{2c^2}+\frac{\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j}{c^2}\right.$$

$$\left.+\frac{v_{jn}v_j^2}{2c^3}-\frac{v_{jn}a_{jn}r_{ij}}{2c^3}+\frac{\vec{a}_j\cdot\vec{v}_j r_{ij}}{2c^3}-\frac{\dot{a}_{jn}r_{ij}^2}{6c^3}-\frac{\vec{v}_i\cdot\vec{a}_j r_{ij}}{c^3}+\cdots\right\} \tag{7.9}$$

考虑到 $\vec{r}_{ij}=-\vec{r}_{ji}$，带电荷 q_i，以速度 $\vec{v}_i$ 运动的 i 粒子产生的场对一个带电 q_j 以速度 $\vec{v}_j$ 运动的 j 粒子产生的相互作用能为：

$$U_{ji}=q_j\left(\varphi_{ji}+\vec{A}_{ji}\cdot\frac{\vec{v}_j}{c}\right)=\frac{q_iq_j}{r_{ij}}\left\{1+\frac{v_{in}^2}{c^2}-\frac{v_i^2}{2c^2}-\frac{a_{in}r_{ij}}{2c^2}+\frac{\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j}{c^2}\right.$$

$$\left.-\frac{v_{in}v_i^2}{2c^3}-\frac{v_{in}a_{in}r_{ij}}{2c^3}+\frac{\vec{a}_i\cdot\vec{v}_i r_{ij}}{2c^3}+\frac{\dot{a}_{in}r_{ij}^2}{6c^3}-\frac{\vec{v}_j\cdot\vec{a}_i r_{ij}}{c^3}+\cdots\right\} \tag{7.10}$$

显然 $U_{ij}\neq U_{ji}$，可见考虑到推迟相互作用后的情况与未考虑推迟相互作用时是不一样的，我们讨论推迟相互作用时要考虑什么粒子对什么粒子的相互作用。设一个系统中有 N 个粒子，考虑到推迟相互作用后，系统总的相互作用能和总哈密顿量应写为：

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}U_{ij}=U_0+U' \tag{7.11}$$

式中 U_0 是保守的相互作用能，U' 是非保守的相互作用能。由于 $U_{ij}\neq U_{ji}$，上式 i，j 坐标重复求和，故总的相互作用能乘上因子 $1/2$，表示平均值。但在讨论系统对某一确定粒子的相互作用时，若约定只取有关的相应项，就不必考虑 $1/2$ 因子。

再来讨论电磁推迟相互作用能的量子力学算符表示。首先需要将加速度和加加速度等用算符来表示，之后就可以将系统的哈密顿量写为：

$$\hat{H}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\hat{p}_i^2}{2m_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\hat{U}_{ij}=\hat{H}_0+\hat{H}' \tag{7.12}$$

其中 $\hat{H}_0$ 是不考虑推迟相互作用时的哈密顿量，$\hat{H}'$ 是考虑到推迟相互作用后附加的哈密顿量。假设粒子加速度只是坐标的函数，不显含时间，按量子力学就有：

$$\hat{a}_i=\frac{1}{m_i}\frac{d\hat{p}_i}{dt}=\frac{1}{i\hbar m_i}\left[\hat{p}_i,\hat{H}\right] \tag{7.13}$$

由于推迟相互作用哈密顿量 $\hat{H}$ 中含有 $\hat{a}_i$，上式是关于 $\hat{a}_i$ 的方程，原则上可以解出 $\hat{a}_i$ 来。但由于上

式是算符方程，解出 $\hat{a}_i$ 实际上有困难且不方便。因此可以采用近似方法，在可以将 $\hat{H}'$ 视为微扰的情况下，在上式中用 $\hat{H}_0$ 来代替 $\hat{H}$ ，得：

$$\hat{a}_i = \frac{1}{m_i}\frac{d\hat{p}_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar m_i}\left[\hat{p}_i, \hat{H}_0\right] \tag{7.14}$$

$$\dot{\hat{a}}_i = \frac{d\hat{a}_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{a}_i, \hat{H}_0\right] = -\frac{1}{\hbar^2 m_i}\left[\ \left[\hat{p}_i, \hat{H}_0\right]\ , \hat{H}_0\right] \tag{7.15}$$

（7.9）式中的其他标量也可以相应地写成算符的形式：

$$\hat{v}_{in} = \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}\cdot\frac{\hat{p}_i}{m_i} \qquad \hat{a}_{in} = \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}\cdot\hat{a}_i \qquad \dot{\hat{a}}_{in} = \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}\cdot\dot{\hat{a}}_i \tag{7.16}$$

如此等等。作为例子我们具体讨论两粒子系统，不考虑电磁推迟效应时，总哈密顿量算符为：

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{7.17}$$

式中 $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 。按 $\hat{p}_i = -i\hbar\nabla_i$ ，从（7.13），（7.14）和上式可得：

$$\hat{a}_1 = -\frac{1}{m_1}\left[\nabla_1,\ \frac{q_1 q_2}{r_{12}}\right] = -\nabla_1\frac{q_1 q_2}{m_1 r_{12}} + \frac{q_1 q_2}{r_{12}}\nabla_1 = \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{m_1 r_{12}^3} + \frac{q_1 q_2}{m_1 r_{12}}\nabla_1 \tag{7.18}$$

$$\hat{a}_2 = -\frac{1}{m_2}\left[\nabla_2,\ \frac{q_1 q_2}{r_{12}}\right] = -\nabla_2\frac{q_1 q_2}{m_2 r_{12}} + \frac{q_1 q_2}{m_2 r_{12}}\nabla_2 = -\frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{m_2 r_{12}^3} + \frac{q_1 q_2}{m_2 r_{12}}\nabla_2 \tag{7.19}$$

$$\dot{\hat{a}}_1 = i\hbar\left[\frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{m_1 r_{12}^3},\ \frac{\nabla_1^2}{2m_1} + \frac{\nabla_2^2}{2m_1}\right] + \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{q_1 q_2}{m_1 r_{12}}\nabla_1,\ \frac{q_1 q_2}{r_{12}}\right] \tag{7.20}$$

$$\dot{\hat{a}}_2 = i\hbar\left[-\frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{m_2 r_{12}^3},\ \frac{\nabla_1^2}{2m_1} + \frac{\nabla_2^2}{2m_1}\right] + \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{q_1 q_2}{m_2 r_{12}}\nabla_2,\ \frac{q_1 q_2}{r_{12}}\right] \tag{7.21}$$

如此等等。按这种方式将（7.9）式中各量写成算符形式后就，就可以得到推迟相互作用量子力学哈密顿量算符的近似表达式。因此在一般的情况下可以令：

$$\hat{H}' = \hat{H}_1' + \hat{H}_2' + \hat{H}_3' + \cdots \tag{7.22}$$

式中 $\hat{H}_1'$ 是与 v/c 成正比的推迟相互作用哈密顿算符， $\hat{H}_2'$ 是与 v^2/c^2 成正比的推迟相互作用哈密顿算符， $\hat{H}_3'$ 是与 v^3/c^3 成正比的推迟相互作用哈密顿算符，如此等等。从（7.9）式可以看出，电磁推迟相互作用最小的修正也在 v^2/c^2 的量级，故一般是很小的。而在诸如氢原子能级问题中，设 $\vec{v}_i$ 为电子速度， $\vec{v}_j$ 为原子核速度。若假设原子核静止 $\vec{v}_j = 0$ ，就没有推迟效应，因此可以说推迟相互作用对原子的能级基本不产生影响。

由于在时间反演下 $\vec{r} \to \vec{r}$ ， $\vec{v} \to -\vec{v}$ ， $\vec{a} \to \vec{a}$ ， $\dot{\vec{a}} \to -\dot{\vec{a}}$ ，从以上各式可以看出，引入推迟相互作用后，量子力学的相互作用哈密顿算符在时间反演下不能保持不变，但对称性破坏与 v^3/c^3 成比例。这结果与第二章中的电磁相互作用高阶微扰重整化过程产生的 T 破坏结果是一致的，即由相互作用哈密顿量引起的时间反演对称性的破坏在三阶过程产生，是比较很小的。而在辐射场与原子的

相互作用过程中，与束缚态原子初始态有关的时间反演对称性破坏出现在二阶过程，是比较大的。

2．带电粒子间散射过程的时间反演对称性破坏

按以上讨论，考虑到电磁推迟相互作用后，带电粒子间的散射过程也必然会出现时间反演对称性破坏，以下我们具体讨论两个带电粒子间的散射问题。设两个粒子的质量为 m_1 和 m_2，电荷为 q_1 和 q_2，相对于静止参考系的坐标为 $\vec{r}_1=(x_1 y_1,z_1)$ 和 $\vec{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$，相对于静止参考系的速度为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$。考虑到时间反演对称性破坏出现在三阶过程，为简单起见先略去二阶项，且仅讨论（7.9）和（7.10）式中的第一和第六项。令 $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2=(x,y,z)$，利用 $\vec{v}_i=\vec{p}_i/m_i\to -i\hbar\nabla_i/m_i$，可以将两个粒子间的相互作用能写为：

$$U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\frac{1}{2}(U_{12}+U_{21})=\frac{q_2q_2}{r}\left[1-\frac{1}{4c^3}\left(v_{1n}v_1^2-v_{2n}v_2^2\right)\right]$$

$$\to\frac{q_2q_2}{r}\left[1+\frac{i\hbar^3}{4c^3}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\left(\frac{1}{m_1^3}\nabla_1\nabla_1^2-\frac{1}{m_2^3}\nabla_2\nabla_2^2\right)\right] \tag{7.23}$$

系统的薛定谔方程为：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2+U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\nabla_1,\nabla_2)\right]\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) \tag{7.24}$$

对于两粒子系统，按现有量子力学的讨论[9]，可以引入质心坐标系，令 $\vec{R}=(X,Y,Z)$ 代表质心坐标，$M=m_1+m_2$ 代表系统总质量，有：

$$MX=m_1x_1+m_2x_2 \qquad MY=m_1y_1+m_2y_2 \qquad MY=m_1z_1+m_2z_2 \tag{7.25}$$

令 $\nabla_R=\vec{i}\,\partial/\partial X+\vec{j}\partial/\partial Y+\vec{k}\partial/\partial Z$，$\nabla=\vec{i}\,\partial/\partial x+\vec{j}\partial/\partial y+\vec{k}\partial/\partial z$，可以求得：

$$\nabla_1=\frac{m_1}{M}\nabla_R+\nabla \qquad \nabla_2=\frac{m_2}{M}\nabla_R-\nabla \tag{7.26}$$

因此在质心参考系中，相互作用能可以写为：

$$U(\vec{r},\nabla_R,\nabla)=\frac{q_2q_2}{r}\left\{1+\frac{i\hbar^3}{4c^3}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\left[\frac{1}{m_1^3}\left(\frac{m_1}{M}\nabla_R+\nabla\right)^3-\frac{1}{m_2^3}\left(\frac{m_2}{M}\nabla_R-\nabla\right)^3\right]\right\}$$

$$=\frac{q_2q_2}{r}\left\{1+\frac{i\hbar^3}{4c^3}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\left[\frac{3}{M^2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\nabla_R^2\nabla+\frac{3}{M}\left(\frac{1}{m_1^2}-\frac{1}{m_2^2}\right)\nabla_R\nabla^2+\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)\nabla^3\right]\right\} \tag{7.27}$$

引入约化质量 $m=m_1m_2/(m_1+m_2)$，系统的薛定谔方程可以改写为：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{R},\vec{r},t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2+U(\vec{r},\nabla_R,\nabla)\right]\psi(\vec{R},\vec{r},t) \tag{7.28}$$

由于相互作用能中包含∇_R和∇_r的乘积，上式不能变量分离。用近似方法，考虑到相互作用能（7.23）式中不含三阶修正时上式可以分离变量，将波函数写为$\psi(\bar{R},\bar{r},t)=\phi(\bar{R})\varphi(\bar{r})\chi(t)$，分离变量后得：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi(t)=E_0\chi(t) \qquad -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2\phi(\bar{R})=(E_0-E)\phi(\bar{R}) \tag{7.29}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(\bar{r})\right]\varphi(\bar{r})=E\varphi(\bar{r}) \tag{7.30}$$

式中E_0是系统的总能量，E为相对运动能量。令$\bar{P}$为质心系总动量，它是一个常数。从（7.29）式可以得到自由粒子波函数解：

$$\chi(t)\to e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t} \qquad \phi(\bar{R})\to e^{\frac{i}{\hbar}\bar{P}\cdot\bar{R}} \tag{7.31}$$

在这种条件下我们有$\nabla_R\psi(\bar{R},\bar{r},t)\to i\bar{P}\psi(\bar{R},\bar{r},t)/\hbar$，或$\nabla_R\to i\bar{P}/\hbar$。在此近似条件下，考虑三阶修正，我们可以得到：

$$U(\bar{r},\nabla)=\frac{q_2q_2}{r}\left\{1+\frac{i\hbar^3}{4c^3}\frac{\bar{r}}{r}\cdot\left[-\frac{3\bar{P}^2}{\hbar^2M^2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\nabla+\frac{3i\bar{P}}{\hbar M}\left(\frac{1}{m_1^2}-\frac{1}{m_2^2}\right)\nabla^2+\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)\nabla^3\right]\right\} \tag{7.32}$$

用上式代替（7.30）式中的$U(\bar{r})$，我们就可以得到质心系中修正的运动方程。如果进一步在质心静止参考系中讨论问题，令$\bar{P}=0$，就有：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(\bar{r},\nabla)\right]\varphi(\bar{r})=E\varphi(\bar{r}) \tag{7.33}$$

$$U(\bar{r},\nabla)=\frac{q_2q_2}{r}\left[1+\frac{i\hbar^3}{4c^3}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)\frac{\bar{r}}{r}\cdot\nabla^3\right] \tag{7.34}$$

以上就是考虑电磁推迟相互作用后的双粒子的量子力学运动方程和相互作用能，它们在时间反演下是不对称的。直接求解（7.33）式是困难的，但可以采用近似方法。已知在$r\to\infty$时，两个粒子弹性散射渐进解的形式为：

$$\varphi(\bar{r})\xrightarrow[r\to\infty]{}\varphi_1(\bar{r})+\varphi_2(\bar{r})=e^{ikr\cos\theta}+f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \tag{7.35}$$

式中$k^2=2mE/\hbar^2$，θ是质心系中入射粒子运动方向与散射粒子运动方向间的夹角。对于库仑势$U(r)=q_1q_2/r$，我们可以采用波恩近似法，在θ较大时可以得到卢瑟福散射公式：

$$f(\theta)=-\frac{q_1^2q_2^2m}{2\hbar^2k^2}csc^2\frac{\theta}{2} \tag{7.36}$$

当θ~0 时（7.36）式不适用。此时可以令$\varphi(\bar{r})\to\varphi_1(\bar{r})=e^{ikr\cos\theta}=e^{ikz}$，表示的是沿$z$轴方向运动的平面入射波。由于在$\theta=\pi/2$的方向上只能观察到散射波，无法观察到入射平面波。作为近似计算，我们可以选择一个θ'，并认为当$\theta\le\theta'$时（7.35）式的第一项起作用，第二项可以忽略。当$\theta>\theta'$时

第二项起作用，第一项可以忽略。在此近似条件下就有：

$$\nabla\varphi(\bar{r})=\nabla\varphi_1(\bar{r})=ik(cos\theta\bar{e}_r-sin\theta\bar{e}_\theta)\varphi_1(\bar{r}) \qquad \theta\le\theta' \tag{7.37}$$

$$\nabla\varphi(\bar{r})=\nabla\varphi_2(\bar{r})=-\left[\left(\frac{1}{r}-ik\right)\bar{e}_r+\frac{ctg\theta/2}{r}\bar{e}_\theta\right]\varphi_2(\bar{r}) \qquad \theta>\theta' \tag{7.38}$$

由此得到等价关系：

$$v^3\to\frac{\bar{r}}{r}\cdot\nabla\nabla^2\sim ik^3 \qquad \theta\le\theta' \tag{7.39}$$

$$v^3\to\frac{\bar{r}}{r}\cdot\nabla\nabla^2\sim-\left(\frac{1}{r}-ik\right)^3-\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r}-ik\right)ctg^2\frac{\theta}{2} \qquad \theta>\theta' \tag{7.40}$$

将以上公式代入（7.34）式，就有$U(\bar{r},\nabla)\to U(\bar{r})$。然后利用波恩近似法，令$V(\bar{r})=2mU(\bar{r})/\hbar^2$，$K=2k\,sin\theta/2$，求解（7.33）式，就可以得到[9]：

$$f(\theta)=-\frac{1}{4\pi}\left[\int_{\theta\le\theta'}e^{i\bar{K}\cdot\bar{r}'}V(\bar{r}')d\tau'+\int_{\theta>\theta'}e^{i\bar{K}\cdot\bar{r}'}V(\bar{r}')d\tau'\right] \tag{7.41}$$

以及微分散射截面$q(\theta)=|f(\theta)|^2$。积分实际上是难以计算的，但我们在此只需讨论时间反演，有：

$$U_T(\bar{r},\nabla)=\frac{q_2q_2}{r}\left[1-\frac{i\hbar^3}{4c^3}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)\frac{\bar{r}}{r}\cdot\nabla^3\right]\ne U(\bar{r},\nabla) \tag{7.42}$$

因此考虑到电磁推迟相互作用后，由（7.33）式描写的带电粒子间的散射过程，以及得到的微分散射截面$q(\theta)$是破坏时间反演对称性的。

若考虑（7.9）和（7.10）式中的其他项，在质心静止参考系我们可以将相互作用能写为：

$$U(\bar{r},\nabla)=\frac{q_2q_2}{r}\left\{1-\frac{\hbar^2}{2c^2}\left(\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}\right)\left(\frac{\bar{r}}{r}\cdot\nabla\right)^2+\frac{\hbar^2}{4c^2}\left(\frac{1}{m_1^2}-\frac{1}{m_2^2}\right)\nabla^2\right.$$

$$-\frac{q_1q_2}{2c^2r^2}\left(\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_1}\right)(1-\bar{r}\cdot\nabla)+\frac{\hbar^2}{2c^2m_1m_2}\nabla^2$$

$$\left.-\frac{i\hbar^3}{4c^3}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)\frac{\bar{r}}{r}\cdot\nabla^3+\frac{i\hbar q_1q_2}{4c^3r^3}\left(\frac{1}{m_1^2}-\frac{1}{m_2^2}\right)\left[2\bar{r}\cdot\nabla+(\bar{r}\cdot\nabla)^2\right]-\cdots\right\} \tag{7.43}$$

在波恩近似下按相同的程序同样可以得到微分散射截面。上式的时间反演为：

$$U_T(\bar{r},\nabla)=\frac{q_2q_2}{r}\left\{1-\frac{\hbar^2}{2c^2}\left(\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}\right)\left(\frac{\bar{r}}{r}\cdot\nabla\right)^2+\frac{\hbar^2}{4c^2}\left(\frac{1}{m_1^2}-\frac{1}{m_2^2}\right)\nabla^2\right.$$

$$-\frac{q_1q_2}{2c^2r^2}\left(\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_1}\right)\left(1-\bar{r}\cdot\nabla\right)+\frac{\hbar^2}{2c^2m_1m_2}\nabla^2$$

$$+\frac{i\hbar^3}{4c^3}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)\frac{\bar{r}}{r}\cdot\nabla^3-\frac{i\hbar q_1q_2}{4c^3r^3}\left(\frac{1}{m_1^2}-\frac{1}{m_2^2}\right)\left[2\bar{r}\cdot\nabla+\left(\bar{r}\cdot\nabla\right)^2\right]-\cdots\Bigg\} \tag{7.44}$$

式中最后一行的各项破坏时间反演对称性，由此得到微分散射截面公式也是对时间反演不对称的。只是由于对称性破坏发生在与V^3/c^3成正比的三阶过程，低能条件下对称性破坏极微小，现有的实验精度不够，难于发现这样小的时间反演对称性破坏。

另外由于粒子的动量 $\bar{p}=m\bar{v}$ ，考虑到（7.6）式的后，由（5.3）式表示的$\hat{H}_1'$也是破坏时间反演对称性的。也就是说在第五章中我们实际上只考虑辐射场的推迟效应，没有考虑带电粒子运动产生的推迟效应。考虑到带电粒子运动产生的推迟效应，辐射场与带电粒子的相互作用哈密顿量也是破坏时间反演对称性的。但这种对称性破坏发生在三阶过程，与二阶过程相比，可以忽略不计。

参考文献

8.曹昌祺，电动力学，人民教育出版社，240 (1979).
9.周世勋，量子力学，高等教育出版社，72 , 268 (1961).