量子场论三阶顶角重整化过程的时间反演对称性破坏（注）

梅 晓 春

（福州原创物理研究所）

内容摘要 按现有的量子场论，电磁相互作用在时间反演变换下保持不变，然而这种结果没有考虑到高阶微扰重整化过程的影响。本文证明考虑到重整化效应后，量子场论三阶顶角过程会产生数量级约为10^{-5}的时间反演对称性破坏。现有粒子物理学关于时间反演对称性实验的精度约为10^{-3}，无法观察到这种对称性破坏。这个结果揭示微观过程存在时间反演对称性破坏现象，可以用来彻底解决宏观系统非平衡演化过程中存在的不可逆性佯谬难题， 说明宏观过程的不可逆性实际上起源于微观过程的不可逆性。

关键词：量子场论，电磁相互作用，对称性，高阶微扰重整化，T 破坏，CPT 破坏，

1. 前 言

按目前物理学一般的理解，微观带电粒子电磁相互作用对时间反演是不变的。原因在于量子力学运动方程和电磁相互作用哈密顿量在时间反演下是不变的。另外我们知道，日常所见宏观物质系统演化过程遵守热力学第二定律，总是破坏时间反演对称性的。目前已知自然界中存在四种相互作用力，即强、弱、电磁相互作用力和万有引力。宏观物质系统由大量原子分子组成的系统，而原子分子由带电粒子组成，带电粒子间的相互作用力为电磁力，因此我们只要需考虑电磁相互作用。如果宏观系统演化过程对时间反演是不对称的，从逻辑上推断，微观电磁相互作用过程也应当具有时间反演对称性。考虑到自然规律的一致性，我们不禁要问，是否我们目前对微观电磁相互作用时间反演过程的理解存在根本性的偏差呢？

然而在实际电磁现象过程中，耗散性和不可逆性实际上是普遍地存在的。例如电子在导体中运动导致的电阻发热，就是一个典型的不可逆的耗散性现象。激光和非线性光学过程存在大量的对时间反演不可逆的现象。事实上大量的实验表明，激光的产生和大多数非线性光学过程，如光学的倍频、和频、差频过程，光学双稳态过程[(1)]，光学自聚焦和自发散过程[(2)]，光回波现象[(3)]，以及光的自变透明和自变吸收[(4)]等等，都是破坏时间反演对称性的。只是由于目前理论上认为微观电磁相互作用过程对时间反演是对称的，使得我们对这些对称性破坏现象视而不见罢了。

因此目前关于微观电磁相互作用过程对时间反演可逆的观念，实际上严重约束了我们对微观过程时间反演性质的真实认识。物理学是实验第一的科学，理论解释必须服从实验事实。如果实际电磁相互作用过程存在时间反演对称性破坏现象，我们就应当设法从理论上进行解释。而不是采用掩耳盗铃的方法，对实际现象视而不见。

为了解决实验与理论之间存在的深刻矛盾，作者已经完成了大量的研究工作。在量子力学微扰论的基础上证明，考虑到电磁推迟相互作用后，束缚态原子系统的光的高阶受激辐射和吸收过程是

注：本文发表于美国 Journal of Modern Physics, 2012, 3, 43-47.

破坏时间反演对称性的[5]。在此基础上对非线性光学的极化率公式，并对激光物理学理论进行了修正[6]。其结果能为非线性光学和激光物理学提供更为合理的基础，可以用来彻底解决统计物理学中长期存在的，宏观系统演化过程的不可逆性佯谬难题。

本文进一步讨论量子场论中电磁相互作用导致的时间反演对称性破坏。对于量子场论的低阶过程，实验证明不存在时间反演对称性破坏。本文证明在量子场论三阶顶角重整化过程中，同样存在时间反演对称性破坏。这情况有点类似于在规范场理论中，某些高阶重整化过程导致手征对称性异常破坏规范对称性[6]。只是这种对称性破坏很小，数量级约为10^{-5}。现有粒子物理学实验的精度约为10^{-3}，因此现有实验无法观察到。

因此无论在量子力学还是量子场论中，电磁相互作用过程都是破坏时间反演对称性的。不同的是，量子力学涉及到的是原子分子中束缚态带电粒子与光的电磁相互作用。时间反演对称性破坏发生在二阶过程，数量级是比较大的。量子场论中涉及到的是非束缚态带电粒子与光子的电磁相互作用，时间反演对称性破坏发生在三阶过程，数量级比较小。以下我们进行详细的讨论。

2. 动量空间中物理量的时间反演变换

按目前量子场论定义的时间反演规则,坐标空间中电磁场和旋量场算符的时间反演定义为[7],[8]：

$$TA_\mu(\bar{x},t)T^{-1} = -A_\mu(\bar{x},-t) \tag{1}$$

$$T\psi(\bar{x},t)T^{-1} = i\gamma_1\gamma_3\psi(\bar{x},-t) = \sigma_2\psi(\bar{x},-t) \tag{2}$$

$$T\overline{\psi}(\bar{x},t)T^{-1} = \left[\sigma_2\psi(\bar{x},-t)\right]^+\gamma_4 = \psi^+(\bar{x},-t)\sigma_2\gamma_4 \tag{3}$$

式中$\sigma_2 \sim \sigma_2 I = i\gamma_1\gamma_3$，$\sigma_2$是泡利矩阵，$I$是$2\times 2$单位矩阵。电磁相互作用的哈密顿密度为：

$$\mathcal{H}(\bar{x},t) = -\frac{ie}{2}A_\mu(\bar{x},t)\left[\ \overline{\psi}(\bar{x},t)\gamma_\mu\psi(\bar{x},t) - \psi^\tau(\bar{x},t)\gamma_\mu^\tau\overline{\psi}^\tau(\bar{x},t)\right] \tag{4}$$

在现有量子场论中，（4）式的时间反演按以下方式进行[7]。考虑到时间反演算符的反么正性质$T\alpha T^{-1} = \alpha^*$，我们有$Ti\gamma_\mu T^{-1} = -i\gamma_\mu^*$。按（1）~（3）式，考虑到$\sigma_2\gamma_4 = \gamma_4\sigma_2$和$\sigma_2\gamma_\mu^*\sigma_2 = \gamma_\mu$，得：

$$T\,\mathcal{H}(\bar{x},t)T^{-1} = -\frac{ie}{2}A_\mu(\bar{x},-t)\left[\ \psi^+(\bar{x},-t)\sigma_2\gamma_4\gamma_\mu^*\sigma_2\psi(\bar{x},-t) - \psi^\tau(\bar{x},-t)\sigma_2^\tau\gamma_\mu\gamma_4\sigma_2^\tau\psi^{+\tau}(\bar{x},-t)\right]$$

$$= -\frac{ie}{2}A_\mu(\bar{x},-t)\left[\ \overline{\psi}(\bar{x},-t)\gamma_\mu\psi(\bar{x},-t) - \psi^\tau(\bar{x},-t)\gamma_\mu^\tau\overline{\psi}^\tau(\bar{x},-t)\right] = \mathcal{H}(\bar{x},-t) \tag{5}$$

由于量子场论中对具体问题计算跃迁几率时，用$\mathcal{H}(\bar{x},-t)$与用$\mathcal{H}(\bar{x},t)$的结果是一样，在这种意义上我们说电磁相互作用过程对时间反演保持不变。

需要强调的是，（4）式描述的相互作用过程是不包含高阶微扰重整化效应。以下我们证明，考虑到高阶微扰重整化后，三阶顶角过程存在时间反演对称性破坏。注意到（1）~（5）式描述的是坐标空间的时间反演，而量子场论对具体过程的计算是在动量空间中进行的。量子化后的旋量场为：

$$\psi(\vec{x},t)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{E}}\left[\ u_s(\vec{p})b_s(\vec{p})e^{i(\vec{p}.\vec{x}-Et)}+v_s(\vec{p})d_s^{+}(\vec{p})e^{-i(\vec{p}.\vec{x}-Et)}\right] \tag{6}$$

另一方面，可以证明存在以下关系[8]：

$$i\gamma_1\gamma_3 u_s(\vec{p})=\sigma_2 u_s(\vec{p})=u_s^*(-\vec{p}) \qquad i\gamma_1\gamma_3 v_s(\vec{p})=\sigma_2 v_s(\vec{p})=v_s^*(-\vec{p}) \tag{7}$$

$$\sigma_2 u_s^*(\vec{p})=\sigma^2 u_s(-\vec{p})=u_s(-\vec{p}) \qquad \sigma_2 v_s^*(\vec{p})=\sigma^2 v_s(-\vec{p})=v_s(-\vec{p}) \tag{8}$$

按照以上公式，可以得到旋量场的产生和湮灭算符的时间反演公式[8]：

$$Tb_s(\vec{p})T^{-1}=b_s(-\vec{p}) \qquad Td_s^{+}(\vec{p})T^{-1}=d_s^{+}(-\vec{p}) \tag{9}$$

以及动量空间旋量场波函数的时间反演公式[8]：

$$Tu_s(\vec{p})T^{-1}=u_s^*(\vec{p}) \qquad Tv_s(\vec{p})T^{-1}=v_s^*(\vec{p}) \tag{10}$$

$$T\overline{u}_s(\vec{p})T^{-1}=\left(u_s^*(\vec{p})\right)^{+}\gamma_4=u_s^{\tau}(\vec{p})\gamma_4 \qquad T\overline{v}_s(\vec{p})T^{-1}=\left(v_s^*(\vec{p})\right)^{+}\gamma_4=v_s^{\tau}(\vec{p})\gamma_4 \tag{11}$$

为以下运算方便，我们定义与 γ_μ 等价的矩阵 $\bar{\gamma}_\mu$ 和 $\tilde{\gamma}_\mu$：

$$\bar{\gamma}_\mu=\gamma_4\gamma_\mu\gamma_4=(-\gamma_1,-\gamma_2-\gamma_3,\gamma_4)=(-\vec{\gamma},\gamma_4) \tag{12}$$

$$\tilde{\gamma}_\mu=\gamma_4\gamma_\mu^*\gamma_4=\gamma_4(-\gamma_1,\gamma_2-\gamma_3,\gamma_4)\gamma_4=(\gamma_1,-\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$$

$$\tilde{\gamma}_\mu^{\tau}=(-\gamma_1,-\gamma_2,-\gamma_3,\gamma_4)=\bar{\gamma}_\mu \tag{13}$$

可知 $\bar{\gamma}_\mu$ 和 $\tilde{\gamma}_\mu$ 也都是厄密矩阵，且有相同的对易关系：

$$\bar{\gamma}_\mu\bar{\gamma}_\nu+\bar{\gamma}_\nu\bar{\gamma}_\mu=\tilde{\gamma}_\mu\tilde{\gamma}_\nu+\tilde{\gamma}_\nu\tilde{\gamma}_\mu=\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu} \tag{14}$$

再令四维动量：

$$\bar{p}_\mu=(-\vec{p},p_4) \tag{15}$$

就有：

$$p_\mu\bar{\gamma}_\mu=(-\vec{p}\cdot\vec{\gamma},p_4\gamma_4)=\bar{p}_\mu\gamma_\mu \tag{16}$$

以下证明过程要用到这几个公式。

3.　三阶顶角重整化过程的时间反演对称性破坏

以下我们来讨论动量空间中单个三阶顶角重整化过程的时间反演。考虑电子被外电磁场散射过程，略去不变因子 $-e\delta^4(p_2-p_1-k)$，动量空间中一阶和三阶顶角过程的跃迁几率振幅为[9]：

$$S\sim-\bar{u}_s(\vec{p}_2)\Gamma_\mu^{(2)}(p_1,p_2)\ u_r(\vec{p}_1)\varepsilon_\mu^{\sigma}(\vec{k}) \tag{17}$$

式中 $k=p_2-p_1$。在一般的情况下，上式作为更复杂的费曼图的一部分出现。按现有量子场论，未进行正规化计算前，上式对时间反演是对称的。按照重整化理论，经过正规化计算将发散量分离后，可得：

$$\Gamma_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2) = (1+L)\gamma_{\mu} + \Lambda_{f\mu}^{(2)}(p_1, p_2) \sim (1+L)\left[\gamma_{\mu} + \Lambda_{f\mu}^{(2)}(p_1, p_2)\right] \tag{18}$$

其中 L 为无穷大发散的量，$\Lambda_{f\mu}^{(2)}(p_1, p_2)$ 不含紫外发散，但含红外发散。为了消除红外发散，在现有的计算过程中，我们先假定光子有一微小的静止质量 ρ，完成计算后再令 $\rho \to 0$ [9]。对上式进行电荷重整化，令 $e \to e(1+L)$，代入（20）式，得到三阶顶角过程有限的几率振幅：

$$S \sim -\bar{u}_2(\vec{p}_2)\left[\gamma_{\mu} + \Lambda_{f\mu}^{(2)}(p_1, p_2)\right] u_1(\vec{p}_1)\varepsilon_{\mu}^{\sigma}(\vec{k}) \tag{19}$$

$$\Lambda_{f\mu}^{(2)}(p_1,p_2) = \gamma_{\mu} G(p_1,p_2) + K(p_1,p_2)\sigma_{\mu\nu} k_{\nu} \tag{20}$$

其中：

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}\left(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu}\right) \tag{21}$$

$$K(p_1,p_2) = \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{q^2} x(1-x) m_0 \tag{22}$$

$$G(p_1,p_2) = \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[\int_0^1 dz \frac{1}{q_1^2} k^2 y(x-y) - \frac{1}{q_0^2}\left(2-2x-x^2\right)m_0 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{q^2} k^2 (1-x+y)(1-y) + \frac{1}{q^2}\left(2-2x-x^2\right)m_0^2 \right] \tag{23}$$

$$q_0^2 = m_0^2 x^2 + \rho^2(1-x) \qquad\qquad q_1^2 = q_0^2 + k^2 y(x-y) z \tag{24}$$

$$q^2 = m_0^2 x^2 + p_1^2 x + k(p_1+p_2)y - (ky + p_1 x)^2 + \rho(1-x) \tag{25}$$

令 $S = S_1 + S_2$，有：

$$S_1 \sim \left[1 + G(p_1, p_2)\right] \bar{u}_s(\vec{p}_2)\gamma_{\mu} u_r(\vec{p}_1)\varepsilon_{\mu}^{\sigma}(\vec{k}) \tag{26}$$

$$S_2 \sim K(p_1,p_2)\bar{u}_s(\vec{p}_2)\sigma_{\mu\nu} k_{\nu} u_r(\vec{p}_1)\varepsilon_{\mu}^{\sigma}(\vec{k}) \tag{27}$$

在时间反演下 $i \to -i$，$\vec{k} \to -\vec{k}$，$k_{\mu} = -k_{\mu}$ 和 $p_{\mu} \to -p_{\mu}$。因此 k^2，p^2 和 $k \cdot p$ 在时间反演不变，（23）和（24）式中的函数 $G(p_1,p_2)$ 和 $K(p_1,p_2)$ 在时间反演下也不变。考虑到 T 算符的反么正性质，在式中插入 $\gamma_4^2 = 1$，按（13）式的定义，S_1 的时间反演为：

$$S_{1T} \sim -u_s^{\tau}(\vec{p}_2)\gamma_4\gamma_{\mu}^{*}\gamma_4^2 u_r^{*}(\vec{p}_1)\varepsilon_{\mu}^{\sigma}(\vec{k}) = -u_s^{\tau}(\vec{p}_2)\tilde{\gamma}_{\mu}\gamma_4 u_r^{*}(\vec{p}_1)\varepsilon_{\mu}^{\sigma}(\vec{k})$$
$$= -u_r^{*\tau}(\vec{p}_1)\gamma_4\tilde{\gamma}_{\mu}^{\tau} u_s(\vec{p}_2)\varepsilon_{\mu}^{\sigma}(\vec{k}) = -\bar{u}_r(\vec{p}_1)\bar{\gamma}_{\mu} u_s(\vec{p}_2)\varepsilon_{\mu}^{\sigma}(\vec{k}) \tag{28}$$

另外对（26）和（28）式取复共轭，可得：

$$S_1^{+} \sim u_r^{+}(\vec{p}_1)\gamma_4^2\gamma_{\mu}\gamma_4 u_s(\vec{p}_2)\varepsilon_{\mu}^{\sigma}(\vec{k}) = \bar{u}_r(\vec{p}_1)\bar{\gamma}_{\mu} u_s(\vec{p}_2)\varepsilon_{\mu}^{\sigma}(\vec{k}) \tag{29}$$

$$S_{1T}^{+} \sim -u_s^{+}(\vec{p}_2)\gamma_4^2\bar{\gamma}_{\mu}\gamma_4 u_r(\vec{p}_1)\varepsilon_{\mu}^{\sigma}(\vec{k}) = -\bar{u}_s(\vec{p}_2)\gamma_{\mu} u_r(\vec{p}_1)\varepsilon_{\mu}^{\sigma}(\vec{k}) \tag{30}$$

即 $S_{1T}=-S_1^+$， $S_{1T}^+=-S_1$ 。就有 $S_{1T}^+S_{1T}=S_1S_1^+=S_1^+S_1$ (因为 S 和 S^+ 实际上已是复数不是矩阵，我们有 $S^+S=SS^+$， $S_TS_T^+=S_T^+S_T$)，时间反演后几率密度不变。对于 S_2 的时间反演，按（12）和（13）式的定义，令：

$$\bar{\sigma}_{\mu\nu}=\gamma_4\sigma_{\mu\nu}\gamma_4=\frac{1}{2i}\left(\bar{\gamma}_\mu\bar{\gamma}_\nu-\bar{\gamma}_\nu\bar{\gamma}_\mu\right)\qquad\qquad \tilde{\sigma}_{\mu\nu}=\frac{1}{2i}\left(\tilde{\gamma}_\mu\tilde{\gamma}_\nu-\tilde{\gamma}_\nu\tilde{\gamma}_\mu\right)\tag{31}$$

就有：

$$\gamma_4\sigma_{\mu\nu}^*\gamma_4=-\frac{1}{2i}\left(\tilde{\gamma}_\mu\tilde{\gamma}_\nu-\tilde{\gamma}_\nu\tilde{\gamma}_\mu\right)=-\tilde{\sigma}_{\mu\nu}\tag{32}$$

$$\tilde{\sigma}_{\mu\nu}^\tau=\frac{1}{2i}\left(\tilde{\gamma}_\mu\tilde{\gamma}_\nu-\tilde{\gamma}_\nu\tilde{\gamma}_\mu\right)^\tau=-\frac{1}{2i}\left(\tilde{\gamma}_\mu^\tau\tilde{\gamma}_\nu^\tau-\tilde{\gamma}_\nu^\tau\tilde{\gamma}_\mu^\tau\right)=-\bar{\sigma}_{\mu\nu}\tag{33}$$

利用以上关系，在式中插入 $\gamma_4^2=1$，考虑到 $k_\nu=\left(\vec{k},-ik_0\right)^*=-\left(-\vec{k},ik_0\right)^*=-\bar{k}_\nu^*$， S_2 的时间反演为：

$$S_{2T}\sim u_s^\tau(\vec{p}_2)\gamma_4\sigma_{\mu\nu}^*\gamma_4^2u_r^*(\vec{p}_1)k_\nu\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})=-u_s^\tau(\vec{p}_2)\tilde{\sigma}_{\mu\nu}\gamma_4u_r^*(\vec{p}_1)k_\nu\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})$$

$$=-u_r^{*\tau}(\vec{p}_1)\gamma_4\tilde{\sigma}_{\mu\nu}^\tau u_s(\vec{p}_2)k_\nu\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})=-\bar{u}_r(\vec{p}_1)\bar{\sigma}_{\mu\nu}u_s(\vec{p}_2)\bar{k}_\nu^*\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})\tag{34}$$

容易证明 $\sigma_{\mu\nu}^+=\sigma_{\mu\nu}$， $\tilde{\sigma}_{\mu\nu}^+=\tilde{\sigma}_{\mu\nu}$， $\bar{\sigma}_{\mu\nu}^+=\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ 。对 S_2 和 S_{2T} 取复共轭，插入 $\gamma_4^2=1$，可得：

$$S_2^+\sim u_r^+(\vec{p}_1)\gamma_4^2\sigma_{\mu\nu}\gamma_4u_s(\vec{p}_2)k_\nu^*\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})=\bar{u}_r(\vec{p}_1)\bar{\sigma}_{\mu\nu}u_s(\vec{p}_2)k_\nu^*\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})\tag{35}$$

$$S_{2T}^+\sim u_s^+(\vec{p}_2)\gamma_4^2\bar{\sigma}_{\mu\nu}\gamma_4u_r(\vec{p}_1)k_\nu^*\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})=\bar{u}_s(\vec{p}_2)\sigma_{\mu\nu}u_r(\vec{p}_1)k_\nu^*\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})\tag{36}$$

过程总的 S 及其时间反演，以及复共轭 S^+ 及其分别为：

$$S\sim\bar{u}_s(\vec{p}_2)\left\{\left[1+G(p_1,p_2)\right]\gamma_\mu+K(p_1,p_2)\sigma_{\mu\nu}k_\nu\right\}u_r(\vec{p}_1)\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})\tag{37}$$

$$S^+\sim\bar{u}_r(\vec{p}_1)\left\{\left[1+G(p_1,p_2)\right]\bar{\gamma}_\mu+K(p_1,p_2)\bar{\sigma}_{\mu\nu}k_\nu^*\right\}u_s(\vec{p}_2)\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})\tag{38}$$

$$S_T\sim-\bar{u}_r(\vec{p}_1)\left\{\left[1+G(p_1,p_2)\right]\bar{\gamma}_\mu+K(p_1,p_2)\bar{\sigma}_{\mu\nu}\bar{k}_\nu^*\right\}u_s(\vec{p}_2)\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})\tag{39}$$

$$S_T^+\sim-\bar{u}_s(\vec{p}_2)\left\{\left[1+G(p_1,p_2)\right]\gamma_\mu+K(p_1,p_2)\sigma_{\mu\nu}\bar{k}_\nu\right\}u_r(\vec{p}_1)\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})\tag{40}$$

将以上诸式进行比较可知，在 S 中令 $k_\nu\to\bar{k}_\nu$（或 $\vec{k}\to-\vec{k}$ ），我们得到 S_T^+；在 S^+ 中令 $k_\nu^*\to\bar{k}_\nu^*$（等价于令 $k_\nu\to\bar{k}_\nu$ 或 $\vec{k}\to-\vec{k}$ ），我们得到 S_T 。也就是说在 S^+S 中令 $k_\nu\to\bar{k}_\nu$，我们可以得到 $S_TS_T^+$ 。显然由于 $\vec{k}\to-\vec{k}$ 时 $S^+S\neq S_T^+S_T=S_TS_T^+$， 三阶顶角重整化过程破坏时间反演对称性。

我们再来讨论坐标空间中对于所有的单个三阶顶角重整化过程的总和过程而言，跃迁几率的时间反演问题。相互作用哈密顿量用坐标空间的场量来表示时，考虑到等价关系：

$$A_\mu(x)\to\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})e^{ik_\nu x_\nu}\qquad\qquad k_\nu=-i\partial_\nu A_\mu(x)/A_\mu(x)\to-i\partial_\nu\tag{41}$$

我们可以将重整化后总的三阶顶角过程等价地写成：

$$S(\bar{x},t)\sim\overline{\psi}(\bar{x},t)\left\{\left[1+G(\bar{x},t)\right]\gamma_\mu A_\mu(\bar{x},t)-iK(\bar{x},t)\sigma_{\mu\nu}\partial_\nu A_\mu(\bar{x},t)\right\}\psi(\bar{x},t) \qquad (42)$$

上式包含四种三阶顶角过程，即以上已经讨论过的电子－电子散射过程，和正电子－正电子的散射过程 $S\sim\bar{v}_s(\bar{p}_1)v_r(\bar{p}_2)\varepsilon_\mu^\sigma(k)$，电子－正电子的产生和湮灭过程 $S\sim\ \bar{u}_s(\bar{p}_2)v_r(\bar{p}_1)\varepsilon_\mu^\sigma(k)$，以及 $S\sim\bar{v}_s(\bar{p}_2)u_r(\bar{p}_1)\varepsilon_\mu^\sigma(k)$。按现有变换理论，时间反演下我们有 $G(\bar{x},t)\to G(\bar{x},-t)$ 和 $K(\bar{x},t)\to K(\bar{x},-t)$，$i\to -i$ 和 $t\to -t$。由于 $x_4=it$ 在时间反演下是不变的，算符 $\partial_\nu=(\nabla,\ \partial/\partial x_4)=(\nabla,\ -i\partial/\partial t)$ 在时间反演下也是不变的。再考虑（1）~（3）式的定义，以及关系 $\sigma_2\gamma_4=\gamma_4\sigma_2$，$\sigma_2\gamma_\mu^*\sigma_2=\gamma_\mu$ 和 $\sigma_2\sigma_{\mu\nu}^*\sigma_2=-\sigma_{\mu\nu}$，（42）式的时间反演就变为：

$$S_T(\bar{x},t)\sim-\psi^+(\bar{x},-t)\left\{\left[1+G(\bar{x},-t)\right]\sigma_2\gamma_4\gamma_\mu^*\sigma_2 A_\mu(\bar{x},-t)+iK(\bar{x},-t)\sigma_2\gamma_4\sigma_{\mu\nu}^*\sigma_2\partial_\nu A_\mu(\bar{x},-t)\right\}\psi(\bar{x},-t)$$

$$=-\overline{\psi}(\bar{x},-t)\left\{\left[1+G(\bar{x},-t)\right]\gamma_\mu A_\mu(\bar{x},-t)-iK(\bar{x},-t)\sigma_{\mu\nu}\partial_\nu A_\mu(\bar{x},-t)\right\}\psi(\bar{x},-t) \qquad (43)$$

另一方面，如果我们在（42）式中令 $t\to -t$，同时令 $\partial'_\nu=(\nabla,\ i\partial/\partial t)$，就有：

$$S(\bar{x},-t)\sim-\overline{\psi}(\bar{x},-t)\left\{\left[1+G(\bar{x},-t)\right]\gamma_\mu A_\mu(\bar{x},-t)-iK(\bar{x},-t)\sigma_{\mu\nu}\partial'_\nu A_\mu(\bar{x},-t)\right\}\psi(\bar{x},-t) \qquad (44)$$

由于 $\partial'_\nu=(\nabla,\ i\partial/\partial t)\neq(\nabla,\ -i\partial/\partial t)=\partial_\nu$，由此就有 $S_T(\bar{x},t)\neq S(\bar{x},-t)$。然而按（5）式的定义，坐标空间相互作用哈密顿量在时间反演不变时，我们应当 $S_T(\bar{x},t)=S(\bar{x},-t)$。由于不满足此条件，（42）式是破坏时间反演对称性的。也就是说按现有量子场论，不论在坐标空间还是在动量空间中，不论是对单个过程还是对各种单个过程的总和，电磁相互作用三阶顶角重整化过程都是破坏时间反演对称性的。

由于三阶顶角是作为一个部件出现在费曼图中的，因此量子场论的电磁相互作用高阶过程都是破坏时间反演对称性的。只是这种对称性破坏的数量级约为 10^{-5}，而现有粒子物理学关于时间反演对称性实验的精度约为 10^{-3}。因此现有实验实际上无法观察到这种在量子场论重整化过程产生的时间反演对称性破坏。

4. 三阶顶角重整化过程的 P, C 变换

再来讨论三阶顶角重整化过程的 P 变换。按目前理论，在 P 变换下 $\bar{x}\to-\bar{x}$，$\vec{k}\to-\vec{k}$，$\bar{p}\to-\bar{p}$，$k_\mu\to(-\vec{k},ik_0)=\bar{k}_\mu$，$p_\mu\to\bar{p}_\mu$，粒子螺旋度 $s\to -s$。因此 k^2，p^2 和 $k\cdot p$ 和 $G(p_1,p_2)$ 和 $K(p_1,p_2)$ 在 P 变换下也是不变。在目前的量子场论中旋量场和电磁场的 P 变换定义为：

$$P\psi(\bar{x},t)P^{-1}=\gamma_4\psi(-\bar{x},t)=\gamma_4\psi(\bar{x}) \qquad P\overline{\psi}(\bar{x},t)P^{-1}=\overline{\psi}(-\bar{x},t)\gamma_4=\overline{\psi}(\bar{x})\gamma_4 \qquad (45)$$

$$P\vec{A}(\bar{x},t)P^{-1}=-\vec{A}(-\bar{x},t)=-\vec{A}(\bar{x}) \qquad PA_4(\bar{x},t)P^{-1}=A_4(-\bar{x},t)=A_4(\bar{x}) \qquad (46)$$

式中 $\bar{x}=(-\bar{x},t)$。可以将（46）式简写为 $PA_\mu(x)P^{-1}=\overline{A}_\mu(\bar{x})$。对于动量空间的 P 变换，我们有：

$$P\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})P^{-1}\to\left[-\vec{\varepsilon}^{\,\sigma}(\bar{k}),\ \varepsilon_4^\sigma(\bar{k})\right]=\bar{\varepsilon}_\mu^\sigma(\bar{k}) \qquad (47)$$

$$Pu_s(\vec{p}_1)P^{-1}=\gamma_4 u_{-s}(-\vec{p}_1) \qquad P\overline{u}_s(\vec{p}_2)P^{-1}=\overline{u}_{-s}(-\vec{p}_2)\gamma_4 \tag{48}$$

考虑到 $\overline{\gamma}_\mu \overline{\varepsilon}_\mu^\sigma(\vec{k})=\gamma_\mu \varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})$，$\overline{\sigma}_{\mu\nu}\overline{k}_\nu \overline{\varepsilon}_\mu^\sigma(\vec{k})=\sigma_{\mu\nu}k_\nu \varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})$，利用以上关系，可得 S_1 和 S_2 的 P 变换：

$$\begin{aligned}
&S_{1P}\sim \overline{u}_{-s}(-\vec{p}_2)\gamma_4\gamma_\mu\gamma_4 u_{-r}(-\vec{p}_1)\overline{\varepsilon}_\mu^\sigma(\vec{k})\\
&=\overline{u}_{-s}(\vec{p}_2)\overline{\gamma}_\mu u_{-r}(\vec{p}_1)\overline{\varepsilon}_\mu^\sigma(\vec{k})=\overline{u}_{-s}(\vec{p}_2)\gamma_\mu u_{-r}(\vec{p}_1)\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})\to S_1
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
&S_{2P}\sim \overline{u}_{-s}(-\vec{p}_2)\gamma_4\sigma_{\mu\nu}\gamma_4 u_{-r}(-\vec{p}_1)\overline{k}_\nu \overline{\varepsilon}_\mu^\sigma(\vec{k})\\
&=\overline{u}_{-s}(\vec{p}_2)\overline{\sigma}_{\mu\nu}u_{-r}(\vec{p}_1)\overline{k}_\nu \overline{\varepsilon}_\mu^\sigma(\vec{k})=\overline{u}_{-s}(\vec{p}_2)\sigma_{\mu\nu}u_{-r}(\vec{p}_1)k_\nu \varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})\to S_2
\end{aligned} \tag{50}$$

于是就有 $S_P\to S$，但粒子的动量和螺旋度反向，而这不改变跃迁几率。因此我们有 $S_T^+S_T=S^+S$，电磁相互作用三阶顶角重整化的单个具体过程在 P 变换下是不变的。

最后讨论三阶顶角重整化过程的 C 变换。按目前量子场论的电荷共轭变换，电磁场和旋量场的 C 变换定义为：

$$CA_\mu(x)C^{-1}=-A_\mu(x) \tag{51}$$

$$C\psi(x)C^{-1}=\psi_c(x)=\gamma_2\gamma_4\overline{\psi}^\tau(x)=\gamma_2\psi^*(x) \tag{52}$$

$$C^{-1}\overline{\psi}(x)C^{-1}=\overline{\psi}_c(x)=\left[\gamma_2\psi^*(x)\right]^+\gamma_4=\psi^\tau(x)\gamma_2\gamma_4 \tag{53}$$

在 C 变换下粒子的动量和螺旋度不变，k_μ 也不变。动量空间电磁场的 C 变换为：

$$C\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k})C^{-1}=-\varepsilon_\mu^\sigma(\vec{k}) \tag{54}$$

按（52）和（53）式的定义，利用关系[7]：

$$\gamma_2 u_s^*(\vec{p})=v_s(\vec{p}) \qquad \gamma_2 v_s^*(\vec{p})=u_s(\vec{p}) \tag{55}$$

可以得到正反旋量粒子动量空间波函数的 C 变换：

$$Cu_s(\vec{p})C^{-1}=\gamma_2 u_s^*(\vec{p})=v_s(\vec{p}) \qquad Cv_s(\vec{p})C^{-1}=\gamma_2 v_s^*(\vec{p})=u_s(\vec{p}) \tag{56}$$

$$C\overline{u}_s(\vec{p})C^{-1}=v_s^+(\vec{p})\gamma_4=\overline{v}_s(\vec{p}) \qquad C\overline{v}_s(\vec{p})C^{-1}=u_s^+(\vec{p})\gamma_4=\overline{u}_s(\vec{p}) \tag{57}$$

因此按现有的变换方式[1]，就可以得到 S_1、S_2 和 S 的 C 变换：

$$S_{1C}\sim -\overline{v}_s(\vec{p}_2)\gamma_\mu v_r(\vec{p}_1)a_\mu(\vec{k}) \qquad S_{2C}\sim -\overline{v}_s(\vec{p}_2)\sigma_{\mu\nu}\overline{v}_r(\vec{p}_1)k_\nu a_\mu(\vec{k}) \tag{58}$$

$$S_C=-\overline{v}_s(\vec{p}_2)\left\{\left[1+G(p_1,p_2)\right]\gamma_\mu+K(p_1,p_2)\sigma_{\mu\nu}k_\nu\right\}v_r(\vec{p}_1)a_\mu(\vec{k}) \tag{59}$$

容易看出在计算跃迁几率时，我们有 $S_T^+S_T=S^+S$，三阶顶角重整化过程也是对 C 变换对称的。

然而必须强调的是，（56）和（57）式实际上不是真正的 C 变换，因此（59）式也不是真正的 C 变换。我们知道按量子场论的费曼图规则，$u_s(\vec{p})$ 代表湮灭一个旋量正粒子的外线因子，$\overline{u}_s(\vec{p})$ 代表产生一个旋量正粒子的外线因子，$v_s(\vec{p})$ 代表产生一个旋量反粒子的外线因子，$\overline{v}_s(\vec{p})$ 则代表湮灭一

个旋量反粒子的外线因子。所以真正的C变换应当将$u_s(\vec{p})$变成$\bar{v}_s(\vec{p})$，将$\bar{u}_s(\vec{p})$变成$v_s(\vec{p})$，而不是将$u_s(\vec{p})$变成$v_s(\vec{p})$，将$\bar{u}_s(\vec{p})$变成$\bar{v}_s(\vec{p})$。因此（56），(57)和（59）式所描述的实际上都不是真正的C变换。为了更清楚的看出问题所在，以下重述现有量子场论中导出旋量粒子产生和湮灭算符的C变换过程。按目前理论的标准做法，利用（12），（52）和（55）式，可以得到：

$$\gamma_2\psi^*(x)=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{E}}\left[\gamma_2 u_s^*(\vec{p})b_s(\vec{p})e^{-ip\cdot x}+\gamma_2 v_s^*(\vec{p})d_s^+(\vec{p})e^{ip\cdot x}\right]$$

$$=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{E}}\left[v_s(\vec{p})b_s(\vec{p})e^{-ip\cdot x}+u_s(\vec{p})d_s^+(\vec{p})e^{ip\cdot x}\right] \tag{60}$$

但这需要假定$b_s^*(\vec{p})=b_s(\vec{p})$，$(d_s^+)^*(\vec{p})=d_s^+(\vec{p})$，即要求算符$b_s(\vec{p})$和$d_s^+(\vec{p})$是实的。这显然是不合适的，因为量子力学中的算符是厄密算符，一般不可能是实的。另一方面C算符又被认为仅对粒子产生和湮灭算符$b_s(\vec{p})$和$d_s^+(\vec{p})$作用，不对其他物理量产生作用，就有：

$$\psi_c(x)=C\psi(x)C^{-1}=\sum_{\vec{p},s}\sqrt{\frac{m}{E}}\left[u_s(\vec{p})Cb_s(\vec{p})C^{-1}e^{ip\cdot x}+v_s(\vec{p})Cd_s^+(\vec{p})C^{-1}e^{-i\,p\,x}\right] \tag{61}$$

至于为何此时C算符不对动量空间的波函数$u_s(\vec{p})$和$v_s(\vec{p})$产生作用，现有理论也没有提供任何逻辑和物理上的说明，这里也存在一致性。再按（80）式的C变换定义，以上两式相等，就得到：

$$Cb_s(\vec{p})C^{-1}=d_s^+(\vec{p}) \qquad\qquad Cd_s^+(\vec{p})C^{-1}=b_s(\vec{p}) \tag{62}$$

考虑相应的变换$\overline{\psi}_c=\psi^\tau\gamma_2\gamma_4$，用相同的方法可以得到：

$$Cb_s^+(\vec{p})C^{-1}=d_s(\vec{p}) \qquad\qquad Cd_s(\vec{p})C^{-1}=b_s^+(\vec{p}) \tag{63}$$

但这种C变换的物理意义是不正确的，因为它将湮灭旋量正粒子的算符$b_s(\vec{p})$与产生旋量反粒子的算符$d_s^+(\vec{p})$互换，将产生旋量正粒子的算符$b_s^+(\vec{p})$与湮灭旋量反粒子的算符$d_s(\vec{p})$互换。这不是C变换的真实意义，C变换的真实意义是正反粒子互换，我们应当有：

$$Cb_s(\vec{p})C^{-1}=d_s(\vec{p}) \qquad\qquad Cb_s^+(\vec{p})C^{-1}=d_s^+(\vec{p}) \tag{64}$$

即C变换后应当将湮灭一个旋量正粒子的算符$b_s(\vec{p})$变成湮灭一个旋量反粒子的算符$d_s(\vec{p})$，将产生一个旋量正粒子的算符$b_s^+(\vec{p})$变成产生一个旋量反粒子的算符$d_s^+(\vec{p})$。显然由（62）和（63）式所给出的C变换不能满足这种要求。因此现有量子场论坐标空间C变换的基本定义（52）式，导致动量空间波函数和旋量粒子的产生湮灭算符的C变换实际上都不是真正的C变换。

另外在讨论以上C变换时，我们使用了（55）式的关系。如果不使用（55）式，而是与（52）式类似直接令$Cu(\vec{p})C^{-1}=\gamma_2 u^*(\vec{p})$，$C\bar{u}(\vec{p})C^{-1}=u^\tau(\vec{p})\gamma_2\gamma_4$，考虑到$\gamma_4\gamma_\mu\gamma_4=\bar{\gamma}_\mu$，$\gamma_2\bar{\gamma}_\mu\gamma_2=-\gamma_\mu^\tau$，$\gamma_4\sigma_{\mu\nu}\gamma_4=\overline{\sigma}_{\mu\nu}$，$\gamma_2\overline{\sigma}_{\mu\nu}\gamma_2=-\sigma_{\mu\nu}^\tau$，在式中插入$\gamma_4^2=1$，就有：

$$S_{1C}\sim -u_s^\tau(\vec{p}_2)\gamma_2\gamma_4\gamma_\mu\gamma_4^2\gamma_2 u_r^*(\vec{p}_1)a_\mu(\vec{k})=u_s^\tau(\vec{p}_2)\gamma_2\bar{\gamma}_\mu\gamma_2\gamma_4 u_r^*(\vec{p}_1)a_\mu(\vec{k})$$

$$=-u_s^\tau(\vec{p}_2)\gamma_\mu^\tau\gamma_4 u_r^*(\vec{p}_1)a_\mu(\vec{k})=-\bar{u}_r(\vec{p}_1)\gamma_\mu u_s(\vec{p}_2)a_\mu(\vec{k}) \tag{65}$$

$$S_{2C}\sim -u_s^\tau(\vec{p}_2)\gamma_2\gamma_4\sigma_{\mu\nu}\gamma_4^2\gamma_2 u_r^*(\vec{p}_1)k_\nu a_\mu(\vec{k})=u_s^\tau(\vec{p}_2)\gamma_2\overline{\sigma}_{\mu\nu}\gamma_2\gamma_4 u_r^*(\vec{p}_1)k_\nu a_\mu(\vec{k})$$

$$=-u_s^\tau(\bar{p}_2)\sigma_{\mu\nu}^\tau\gamma_4 u_r^*(\bar{p}_1)k_\nu a_\mu(\bar{k})=-\bar{u}_r(\bar{p}_1)\sigma_{\mu\nu}u_s(\bar{p}_2)k_\nu a_\mu(\bar{k}) \tag{66}$$

$$S_C=-\bar{u}_r(\bar{p}_1)\left\{\left[1+G(p_1,p_2)\right]\gamma_\mu+K(p_1,p_2)\sigma_{\mu\nu}k_\nu\right\}u_s(\bar{p}_2)a_\mu(\bar{k})=-S \tag{67}$$

用上式计算跃迁几率也是C变换不变的。但是同样可以看到（64）式也不是真正的C变换，因为它实际上没有进行C变换。C变换是将正粒子变为反粒子，但上式仍然是正粒子的顶角相互作用振幅，而不是反粒子的顶角相互作用振幅。

以上问题不仅在高阶重整化过程存在，在低阶过程中也同样存在。不仅在电磁相互作用中存在，在强相互作用和弱相互作用过程中也同样存在。因此可以说目前量子场论在动量空间中定义的，粒子产生与湮灭相互作用过程的C变换实际上都不是真正的正反粒子共轭变换。虽然在实际具体问题中，粒子物理学家们似乎都能按正确的方式计算C变换。

4. 三阶顶角重整化过程的 CPT 对称性问题

采用相同的方法，可以证明电磁相互作用三阶顶角重整化过程是C,P对称的。由于三阶顶角重整化过程存在T破坏，就出现CPT破坏。容易证明这种CPT破坏不对正反粒子的静止质量产生影响。令$\mathcal{H}_0(x)$代表正粒子静止能量（质量）的哈密顿算符，$|u\rangle$代表正粒子态，$|v\rangle$代表反粒子态。由于静能量算符$\mathcal{H}_0(x)$不含高阶重整化的修正，我们实际上仍然有：

$$CPT\,\mathcal{H}_0(x)(CPT)^{-1}=\mathcal{H}_0(x) \tag{68}$$

在CPT变换下可得：

$$\langle u|\mathcal{H}_0(x)|u\rangle=\langle u|(CPT)^{-1}CPT\,\mathcal{H}_0(x)(CPT)^{-1}CPT|u\rangle=\langle v|\mathcal{H}_0(x)|v\rangle \tag{69}$$

也就是说正反粒子仍然具有相同的静止能量（质量），CPT对称性对正反粒子的静止质量并不敏感。产生这种CPT破坏的原因需要进一步研究。

参考文献

1. Y. R. Shen, “The Principles of Nonlinear Optics,” Wiley-Interscience, New York, 1984.
2. S.L.McCall, H.M.Gibbs and T.N.C.Venkateasn, J. Opt. Soc. Am. 65, 1184 (1975). D.A.B.Miller, D.S.Chemla, T.C.Demen, C.Gossard, W.Wiegmann, T.H.Wood and C.A.Burrus, Appl. Phys.lette.45, 83 (1984). T.Kobayashi, N.C.Kothari and H.Uchiki, Phys. Rev. A 29, 2727 (1984). A.K.Kar, J.G.H.
3. M.M.T.Loy and Y.R.Shen, Phys.Rev.Lett, 25, 1333 (1971); Appl.Phys.Lett. 19, 285 (1970). G.K.L.Wong and Y.R.Shen, Phys Rev. Lett 32, 527 (1973).
4. W.Kaiser and C.G.B.Garret, Phy.Rev.Lett.7, 229 (1961).
5. 梅晓春，电磁推迟相互作用与光的高阶受激辐射和吸收过程的时间反演对称性破坏，**中国科学** G，5 **期**，(2007). Mei Xiaochun, Science in China, Series G, Volume 51, Number 3, 2008; co-published with Springer-Verlag GmbH 1762-1799 (Print) 1862-2844 (On line).
6. Mei Xiaochun, Electromagnetic Radiation, InTech Oprn Acceess, (ISBN 979-953-307-332-2), (2012).
7. 李政道，粒子物理和场论，山东科学技术出版社，28，111，113，164 (1996).

8. 殷鹏程，量子场论纲要，上海科学技术出版社，125 (1986).
9. 朱洪元，量子场论，科学出版社，263，272，283，298 (1960).