黎曼几何的基础存在严重的缺陷（1）

——黎曼曲率张量无效的实例和黎曼几何与高斯微分几何的不一致性——

梅晓春[1]　　　**俞平**[2]

（1）福州原创物理研究所　　　**（2）美国 Cognitech 计算技术研究所**

内容摘要 本文指出黎曼几何的两个最核心概念——度规张量和曲率张量的现有形式都是有问题的。通过具体计算证明，对于某些任意构造的二维（不可展）曲面，在部分区域或全部区域却可能出现曲率张量 $R_{1212}=0$ 的结果。因此黎曼曲率公式失效，我们不可能用 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ 是否等于零来判断空间是否弯曲。事实上由于高斯微分几何中二维曲面定义在三维平直空间中，曲面第一基本形式中的函数 E，F 和 G 实际上是不独立的。如果任意选择 E，F 和 G 构造曲面，高斯曲率公式也有可能不适用。此外，高斯理论中二维曲面的曲率是有方向性的，而黎曼几何中二维曲面只有一个标量曲率，不能显示曲率的方向性，因此黎曼几何与高斯微分几何存在不一致性。更严重的问题是，黎曼几何采用局部活动标架参考系，其基向量 $\bar{e}_i$ 不是常数。因此黎曼几何的度规实际上应该包含联络符号 Γ^i_{jk}，其形式要比现有形式复杂得多。本文给出黎曼度规的正确形式，由此导致黎曼几何根本性的改变。由于高斯微分几何建立在固定坐标系基础上，其联络 Γ'^i_{jk} 与黎曼几何的联络 Γ^i_{jk} 实际上是不一样的，导致黎曼几何的 R_{1212} 与高斯微分几何的 R'_{1212} 实际上不一样。因此本文的结论是，黎曼几何的基础存在严重的缺陷，它与高斯几何存在不一致性，数学家需要考虑黎曼几何存在的合法性。

关键词　微分几何，黎曼几何，度规张量，黎曼曲率张量，高斯曲率，高斯方程

一．前 言

本文分成两个部分，第一部分（第二和第三章）证明，对于某些任意选择的曲面，黎曼曲率张量和高斯曲率公式失效，分析黎曼曲率张量和高斯曲率公式失效的原因。第二部分（第四和五章）证明黎曼度规的现有形式是错误的，证明黎曼几何与高斯微分几何存在不一致性。

众所周知，黎曼曲率张量是黎曼几何最重要的核心概念之一。黎曼微分几何中有两种方法来判断空间是否弯曲。第一是看是否存在坐标变换，能够将弯曲空间的度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 变成常数，二是看黎曼曲率张量 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ 是否处处等于零。本文列举许多例子，证明对于某些任意构造的二维（不可展）曲面，在部分区域或全部区域却可能得出 $R_{1212}=0$ 的结果。因此黎曼曲率张量对这些曲面失效，我们不可能用 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ 是否等于零来判断空间是否弯曲。

进一步的分析表明，这些曲面也导致高斯曲率公式失效，原因在于这些曲面在高斯曲面理论中是不合法的。高斯微分几何理论中，二维曲面是以三维平直空间为背景的。将三维空间中定义的曲面用两个变量表示，得到曲面第一基本形式，其中的函数 E，F 和 G 不是独立的。如果我们任意选择曲面度规，得到的 E，F 和 G 一般是相互独立的。用高斯曲率公式计算，就会得出某些不可展曲

面的部分区域或全部区域曲率 $K=0$ 的错误结果。将这种不合法曲面还原回到三维空间描述，其度规不能用平直空间的微分弧长平方来表示。

另一方面，黎曼几何的流形（弯曲空间）是没有更高维的平直空间背景的。二维黎曼曲面被认为可以独立存在，不需要被嵌入三维平直空间。只要满足连续可微条件，任意选择度规张量 g_{ij} 构造出来的曲面对黎曼几何都是合法的。因此如果出现二维不可展曲面 $R_{1212}=0$ 的情况，就只能说明黎曼曲率张量有问题。在高维空间中，是否能用 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ 来描述曲率也是值得怀疑的。

事实上，高斯微分几何与黎曼几何的基本出发点是不一样的。然而二者却能得到相同的曲率公式，这样的结果是可疑的。本文指出，高斯微分几何与黎曼几何实际上是不一致的。在高斯几何中，二维曲面的不同方向有不同的曲率。高斯曲率公式 $K=k_1k_2$ 中，k_1 和 k_2 分别是曲面在主法方向上的最大曲率和最小曲率。因此在高斯理论中，实际可测量的曲率不是乘积 k_1k_2，而是单独的 k_1 和 k_2。在一般的情况下，高斯曲面曲率用法曲率表示。法曲率是微分关系，其形式是 $K=II/I$，其中 I 和 II 是高斯曲面的第一和第二形式。在曲面的不同方向上，曲率一般是不一样的。

然而在黎曼几何中，二维曲面的曲率张量只有一个独立分量 R_{1212}。在曲面的不同方向，黎曼曲率都可以用标量 $K\sim R_{1212}$ 来描述，因此是没有方向的。也就是说黎曼几何实际上认为二维曲面的曲率是乘积 k_1k_2，而不是 k_1 和 k_2，但这是完全错误的。它不但与高斯理论不一致，而且违背基本几何常识。因此二维空间中黎曼曲率张量一般不可能是正确的，高维空间中黎曼曲率张量的有效也是值得怀疑的。

黎曼几何的另外一个基本概念是度规张量，本文证明其现有形式实际上也是错误的。黎曼几何采用活动的局部标架参考系，用 $d\vec{r}=\vec{e}_i dx^i$ 表示位移，用以下度规表示弧长【1】:

$$dS^2=d\vec{r}\cdot d\vec{r}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j dx^i dx^j=g_{ij}dx^i dx^j \qquad (1)$$

其中令 $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=g_{ij}$。然而这种定义是错误的，原因在于局部标架参考系中基向量 $\vec{e}_i$ 是变量，我们有 $d\vec{r}\neq\vec{e}_i dx^i$。事实上黎曼几何用公式 $\vec{A}=A^i\vec{e}_i$ 表示向量，如果 $A^i=x^i$ 是空间坐标分量，局域参考系某点邻域空间点的位置向量就是 $\vec{r}=x^i\vec{e}_i$。比如在三维欧氏空间的二维曲面的某点上建立切平面，在该切平面上位置向量就可以写为 $\vec{r}=x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2$。如果描述的是曲面上的位移，将这个公式微分，由于 $\vec{e}_i$ 是变量，就应当有：

$$d\vec{r}=\vec{e}_i dx^i+x^i d\vec{e}_i \qquad (2)$$

因此黎曼空间的度规应当是：

$$dS^2=d\vec{r}\cdot d\vec{r}=\vec{e}_i\cdot\mathrm{\vec{e}_j dx^i}dx^j+2x^j\vec{e}_i\cdot d\vec{e}_j dx^i+x^i x^j d\vec{e}_i\cdot d\vec{e}_j$$

$$=(g_{ij}+2x^k g_{il}\Gamma^l_{kj}+x^k x^l g_{pq}\Gamma^p_{kj}\Gamma^q_{li})dx^i dx^j=G_{ij}dx^i dx^j \qquad (3)$$

所以（1）式只能适用于固定坐标系，否则我们就无法区分固定坐标系和活动坐标系的度规。事实上，黎曼几何中所有与标架有关的微分量都包含联络 Γ^i_{jk}。弧长的微分也应当包含联络，这是很自然的结果。为了使弯曲空间不同点上的弧长能够进行比较，度规张量包含联络是必要的。按照（3）式，黎曼度几何的度规张量应当是 G_{ij} 而不是 g_{ij}。由于联络 Γ^i_{jk} 是通过对 $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=g_{ij}$ 进行微分得到的，我们就不可能用 G_{ij} 来计算联络。

另一方面，在高斯曲面论中，曲面度规的基本形式是：

$$dS^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)\cdot(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)$$

$$= \vec{r}_u\cdot\vec{r}_u du^2 + 2\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v du dv + \vec{r}_v\cdot\vec{r}_v dv^2 \sim g'_{ij}dx^i dx^j \qquad (4)$$

其中 $\vec{F}_u = \partial\vec{F}/\partial u$， $\vec{F}_v = \partial\vec{F}/\partial v$。由于 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 定义在三维欧氏空间中，基矢 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 是固定不变的，即令 $d\vec{i} = d\vec{j} = d\vec{k} = 0$。因此切向量 $\vec{F}_u$ 和 $\vec{F}_v$ 是以固定基矢为基准的，对 $\vec{F}_u$ 和 $\vec{F}_v$ 做进一步微分时，基矢 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 仍然不变，二次微分量 $\vec{F}_{uu}$， $\vec{F}_{uv}$ 和 $\vec{F}_{vv}$ 仍然以固定坐标为基准。

可见高斯几何是建立在固定基矢基础上的，这与黎曼几何使用活动标架是不同的，这种不同必然要在度规的定义中体现出来。如果（3）和（4）式表示相同的曲面，就有 $\vec{F}_i\cdot\vec{F}_j = g'_{ij} = G_{ij} \neq g_{ij}$。因此尽管利用高斯方程和 Weingarten 方程，从高斯曲面理论得到的曲率张量 R'_{1212} 与黎曼几何的曲率张量 R_{1212} 形式完全一样，但由于 $g'_{ij} \neq g_{ij}$，用 g'_{ij} 计算的联络 Γ'^{i}_{jk} 和用 g_{ij} 计算的联络 Γ^{i}_{jk} 实际上是不一样的， R'_{1212} 与 R_{1212} 也是不一样。

除此之外，高斯方程中基向量 $\vec{r}_1$， $\vec{r}_2$ 和 $\vec{n}$ 的地位是不对称的，但黎曼几何中局部标架展开式对所有的基向量 $\vec{e}_i$ 是对称的。考虑到这一点，高斯方程展开式的联络 Γ'^{i}_{jk} 与黎曼几何联络 Γ^{i}_{jk} 也是不同的，也导致高斯微分几何中 R'_{1212} 与黎曼几何中的 R_{1212} 实际上不一样。

本文最后对黎曼几何进行综合评述，指出黎曼几何不可能独立于高斯几何而存在。如果没有高斯理论作为基础，按照黎曼几何我们甚至连球面的度规形式都不能确定。更一般地说，高维弯曲空间的几何理论必须以更高维的平直空间为背景，否则无法建立有实际意义的理论。即使建立起这种理论，也不过是一堆抽象的数学符号，与真实的物理世界没有关系。因此对于黎曼几何，我们需要考虑其存在的合法性。

二．用黎曼曲率张量无法判断空间平直性的实例

2.1 二维空间的黎曼曲率张量

在高斯微分几何中，N 维平直空间的度规为：

$$dS^2 = \eta_{\alpha\beta}dX_\alpha dX_\beta \qquad (6)$$

其中度规张量 $\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$。在黎曼几何中，N 维弯曲空间的度规为：

$$dS^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx_\alpha dx_\beta \qquad (7)$$

一般而言 $g_{\alpha\beta}(x) \neq \delta_{\alpha\beta}$。按照黎曼几何的基本原则，如果无法通过坐标变换将（7）式变成（6）式的形式，（7）式描述的空间就是真正弯曲的。如果可以找到坐标变换，将（7）式变成（6）式，（7）式描述的空间实际上是平直的。

由于寻找这种变换比较麻烦，就需要有更方便的方法。它就是直接计算黎曼曲率张量 $R^{\nu}_{\alpha\beta\mu}$ 或 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$，看它们是否等于零。如果 $R^{\nu}_{\alpha\beta\mu} = 0$ 或 $R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$，度规（7）描写的空间在本质上是平直的，否则就是弯曲的。由于 $R^{\nu}_{\alpha\beta\mu}$ 和 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ 是等价的，我们以下仅讨论 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$，其具体形式为【1】:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu\partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu\partial x_\beta} - \frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu\partial x_\alpha}\right) + \Gamma_{\nu\alpha,\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\beta} - \Gamma_{\nu\beta,\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha} \qquad (8)$$

式中$\varGamma_{\nu\alpha,\rho}$和$\varGamma^{\rho}_{\mu\beta}$分别是第一类和第二类克里斯托夫符号：

$$\varGamma_{\mu\nu,\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right) \tag{9}$$

$$\varGamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha}\left(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) \tag{10}$$

以下证明用（8）式计算某些真正的二维不可展曲面，仍然可能出现$R_{\alpha\beta\mu\nu}=0$的结果，因此我们实际上不可能用黎曼曲率张量来判断空间是否弯曲。对于二维曲面，（7）式写为：

$$dS^2 = g_{11}(x_1,x_2)dx_1^2 + 2g_{12}(x_1,x_2)dx_1dx_2 + g_{22}(x_1,x_2)dx_2^2 \tag{11}$$

按照公式$g_{\alpha\beta}g^{\alpha\delta}=\delta^{\delta}_{\beta}$，得到四个关于$g^{\alpha\beta}$的方程：

$$g_{12}g^{11} + g_{22}g^{21} = 0 \qquad g_{11}g^{11} + g_{21}g^{21} = 1$$

$$g_{11}g^{12} + g_{21}g^{22} = 0 \qquad g_{12}g^{12} + g_{22}g^{22} = 1 \tag{12}$$

考虑到$g_{12}=g_{21}$，从上式解出：

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2} \qquad g^{21} = g^{12} = -\frac{g_{12}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2} \qquad g^{22} = \frac{g_{11}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2} \tag{13}$$

在二维的情况下，独立的黎曼曲率张量只有一个分量：

$$R_{1212} = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_2\partial x_2} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1\partial x_1}\right) + \varGamma_{21,\,1}\varGamma^{1}_{12} + \varGamma_{21,\,2}\varGamma^{2}_{12} - \varGamma_{22,\,1}\varGamma^{1}_{11} - \varGamma_{22,\,2}\varGamma^{2}_{11} \tag{14}$$

按照（9）和（10）式，可得：

$$\varGamma_{21,\,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \qquad \varGamma_{21,\,2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \qquad \varGamma_{22,\,1} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\right) \qquad \varGamma_{22,\,2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \tag{15}$$

$$\varGamma^{1}_{12} = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} + \frac{1}{2}g^{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \qquad \varGamma^{1}_{11} = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{1}{2}g^{12}\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right)$$

$$\varGamma^{2}_{12} = \frac{1}{2}g^{12}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} + \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \qquad \varGamma^{2}_{11} = \frac{1}{2}g^{12}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{1}{2}g^{22}\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right) \tag{16}$$

代入（14）式，得到：

$$R_{1212} = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_2\partial x_2} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1\partial x_1}\right)$$

$$+\frac{1}{4(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)}\left\{g_{22}\left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} - 2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2}\right)\right]\right.$$

$$-g_{12}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}+2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2}\right)+2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}-2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2}\right)-\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2}\right]$$

$$\left.+g_{11}\left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\right)^2+\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}-2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}\right)\right]\right\} \tag{17}$$

对于平面度规 $dS^2=dx_1^2+dx_2^2$ 和柱面度规 $dS^2=a^2d\theta^2+dz^2$，我们有 $g_{ii}=$ 常数和 $g_{12}=0$，代入（17）式可得 $R_{1212}=0$ 。对于可展的锥面度规 $dS^2=adr^2+r^2d\theta^2$，我们有 $g_{11}=a=$ 常数，$g_{12}=0$ 和 $g_{22}=x_1^2$，也可得 $R_{1212}=0$（在非锥点）。因此对于平面和可展曲面，按（17）式计算曲率为零。对于球面度规：

$$dS^2=a^2d\theta^2+a^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{18}$$

式中 a 是球的半径。将 $g_{11}=a^2$，$g_{22}=a^2\sin^2\theta$ 和 $g_{12}=0$ 代入（17）式，可得 $R_{1212}=a^2\sin^2\theta\neq 0$ 。按照高斯公式，球面的曲率是：

$$K=\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=\frac{1}{a^2} \tag{19}$$

这些都是数学上熟知的结果，说明在二维空间中用 R_{1212} 描述曲率的有效性。

然而这个结论没有普遍性，以下我们给出几个真正的二维曲面但 $R_{1212}=0$ 的例子，证明不能根据黎曼曲率张量是否等于零用来判断空间是否弯曲。

2. 2 用黎曼曲率张量无法正确判断空间平直性的实例

1．我们先讨论具有以下形式的二维度规：

$$dS^2=F(x_1)dx_1^2+2Adx_1dx_2+Bdx_2^2 \tag{20}$$

其中 $F(x_1)$ 是任意函数，A 和 B 是常数。将 $g_{11}=F(x_1)$，$g_{12}=A$ 和 $g_{22}=B$ 代入（17）式，得 $R_{1212}=0$ 。也就是说按照黎曼几何，不论 $F(x_1)$ 的具体形式如何，（20）式描述的曲面在空间任何点上的曲率都为零。但我们需要判断（20）式能否变换成二维平面度规的形式，以确定它是平面还是真正的曲面。

为此令 $X=X(x_1,\ x_2)$，$Y=Y(x_1,\ x_2)$，$X_1=\partial X/\partial x_1$，$X_2=\partial X/\partial x_2$，$Y_1=\partial Y/\partial x_1$，$Y_2=\partial Y/\partial x_2$ 。有 $dX=X_1dx_1+X_2dx_2$，$dY=Y_1dx_1+Y_2dx_2$，代入（6）式，得：

$$dS^2=(X_1^2+Y_1^2)dx_1^2+2(X_1X_2+Y_1Y_2)dx_1dx_2+(X_2^2+Y_2^2)dx_2^2 \tag{21}$$

如果（20）式能写成平面度规的形式，将（21）式与（21）式比较，则有：

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)^2=F(x_1) \tag{22}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial X}{\partial x_2}+\frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial Y}{\partial x_2}=A \tag{23}$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)^2=B \tag{24}$$

（22）和（24）式有两组一般的解：

$$X = a_1 \int \sqrt{F(x_1)} dx_1 + a_2 x_2 \qquad\qquad Y = b_1 \int \sqrt{F(x_1)} dx_1 + b_2 x_2 \tag{25}$$

$$X = a_1 \int \sqrt{F(x_1)} dx_1 + \sqrt{B} \sin x_2 \qquad\qquad Y = b_1 \int \sqrt{F(x_1)} dx_1 + \sqrt{B} \cos x_2 \tag{26}$$

积分常数 $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 1$， $\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = B$ 。将（25）和（26）式代入（23）式，考虑到变量 x_1 和 x_2 是相互独立的，得：

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2)\sqrt{F(x_1)} \neq A \qquad\qquad \sqrt{B}(a_1 \cos x_2 - b_1 \sin x_2) \neq \frac{A}{\sqrt{F(x_1)}} \tag{27}$$

上式不可能成立，除非两边都等于常数。此外，（22）~（24）式有一组特解：

$$X = \frac{A}{\sqrt{B}} x_1 + \sqrt{B} x_2 \qquad\qquad Y = \int \sqrt{F(x_1) - A^2 / B}\, dx_1 \tag{28}$$

得 $X_1 = A/\sqrt{B}$， $X_2 = \sqrt{B}$， $Y_1 = \sqrt{F(x_1) - A^2 / B}$ 和 $Y_2 = 0$，容易证明它们满足（22）~（24）式。然而（28）式必须满足 $F(x_1) - A^2 / B > 0$，否则没有意义。因此（20）式代表这样一个曲面，在 $F(x_1) > A^2 / B$ 的区间实际上是平面，在 $F(x_1) < A^2 / B$ 的区间是真正的曲面。比如取 $F(x_1) = |x_1|$ 和 $A = B = 1$，（20）式表示在 $|x_1| > 1$ 和 $-\infty < x_2 < \infty$ 的区域是平面，在 $|x_1| < 1$ 和 $-\infty < x_2 < \infty$ 的区域是曲面。

然而按照（17）式计算，在全部空间都有 $R_{1212} = 0$ 。因此在 $|x_1| < 1$ 和 $-\infty < x_2 < \infty$ 的区域，黎曼曲率张量不可能是正确的。除此之外，我们找不到其他解。事实上如果还能够找到其他满足（22）~（24）式的解，一般而言这个解不可能在全空间都有效。但 $R_{1212} = 0$ 在全空间内对任意的 $F(x_1)$ 都有效，因此一般而言用（17）式确定的黎曼曲率张量描述（20）式度规的曲率不可能总是有效的。

2．对于二维度规：

$$dS^2 = A dx_1^2 + 2F(x_1) dx_1 dx_2 + B dx_2^2 \tag{29}$$

设 $F(x_1)$ 是任意函数，。将 $g_{11} = g_{22} = 1$ 和 $g_{12} = F(x_1)$ 代入（17）式，同样也得 $R_{1212} = 0$ 。如果（29）式能变成平面度规，则有：

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)^2 = A \tag{30}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial X}{\partial x_2} + \frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial Y}{\partial x_2} = F(x_1) \tag{31}$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)^2 = B \tag{32}$$

（30）和（32）式有三组共同解：

$$X = a_1 x_1 + a_2 x_2 \qquad\qquad Y = b_1 x_1 + b_2 x_2 \tag{33}$$

$$X = \sqrt{A}\sin x_1 + \sqrt{B}\sin x_2 \qquad Y = \sqrt{A}\cos x_1 + \sqrt{B}\cos x_2 \tag{34}$$

$$X = \sqrt{A}\sin x_1 + a_2 x_2 \qquad Y = \sqrt{A}\cos x_1 + b_2 x_2 \tag{35}$$

积分常数$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = A$，$\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = B$。将（33）和（34）式代入（31）式，得：

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 \neq F(x_1) \qquad \sqrt{AB}\cos(x_1 - x_2) \neq F(x_1) \tag{36}$$

将（35）式代入（31）式，得：

$$\sqrt{A}(a_2 \cos x_1 - b_2 \sin x_1) = F(x_1) \tag{37}$$

此外，（32）~（34）式还有一组特解：

$$X = \sqrt{A}\int F(x_1)dx_1 + \sqrt{B}x_2 \qquad Y = \sqrt{A}\int \sin\left(\arccos F(x_1)\right)dx_1 \tag{38}$$

有 $X_1 = \sqrt{A}F(x_1)$，$X_2 = \sqrt{B}$，$Y_1 = \sqrt{A}\sin\left(\arccos F(x_1)\right)$和$Y_2 = 0$，可得：

$$X_1^2 + Y_1^2 = AF^2(x_1) + A\sin^2\left(\arccos F(x_1)\right)$$

$$= A\cos^2\left(\arccos F(x_1)\right) + A\sin^2\left(\arccos F(x_1)\right) = A$$

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 = \sqrt{AB}F(x_1) \qquad X_2^2 + Y_2^2 = B \tag{39}$$

然而（38）式的解必须满足$|F(x_1)| \leq 1$，否则没有意义。同时，按（39）式还必须有$\sqrt{AB} = 1$。因此只要$F(x_1) \neq \sqrt{A}(a_3 \cos x_1 - a_4 \sin x_1)$和$|F(x_1)| > 1$，或者$|F(x_1)| \leq 1$但$\sqrt{AB} \neq 1$，（38）式的解就是无效的。这个结果表明，（29）式代表一个这样的曲面，它在某些区间是平面，在某些区间是曲面。然而按照（17）式计算，在全部空间都有$R_{1212} = 0$，这显然是不可能的。

除此之外，我们找不到其他解。事实上即使还能找到其他同时满足（30）~（32）式的解，一般而言这个解不可能在全空间都有效。但$R_{1212} = 0$对全空间任意的$F(x_1)$都有效，因此一般而言对于（30）式的度规，用（17）式确定的黎曼曲率张量来计算空间曲率不可能总是正确的。

3．对于二维度规：

$$dS^2 = F_1(x_1)dx_1^2 + 2F_2(x_1)dx_1 dx_2 + Adx_2^2 \tag{40}$$

设$F_1(x_1)$和$F_2(x_1)$是任意函数，将$g_{11} = F_1(x_1)$，$g_{12} = F_2(x_1)$和$g_{22} = A =$常数代入（17）式，仍然可以得到$R_{1212} = 0$。如果（40）式是平面度规，则应当有：

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)^2 = F_1(x_1) \tag{41}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial X}{\partial x_2} + \frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial Y}{\partial x_2} = F_2(x_1) \tag{42}$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)^2 = A \tag{43}$$

（41）~（43）式有一组特解：

$$X=\frac{1}{\sqrt{A}}\int F_2(x_1)dx_1+\sqrt{A}x_2 \qquad Y=\int\sqrt{F_1(x_1)}\sin\arccos\frac{F_2(x_1)}{\sqrt{AF_1(x_1)}}dx_1 \tag{44}$$

可得：

$$X_1=\frac{1}{\sqrt{A}}F_2(x_1)=\sqrt{F_1(x_1)}\frac{F_2(x_1)}{\sqrt{AF_1(x_1)}}=\sqrt{F_1(x_1)}\cos\left(\arccos\frac{F_2(x_1)}{\sqrt{AF_1(x_1)}}\right)$$

$$X_2=\sqrt{A} \qquad Y_1=\sqrt{F_1(x_1)}\sin\left(\arccos\frac{F_2(x_1)}{\sqrt{AF_1(x_1)}}\right) \qquad Y_2=0 \tag{45}$$

容易验证，上式满足 $X_1^2+Y_1^2=F_1(x_1)$， $X_1X_2+Y_1Y_2=F_2(x_1)$ 和 $X_2^2+Y_2^2=A$。同样，（44）式的解必须满足 $F_2(x_1)/\sqrt{AF_1(x_1)}\le 1$。对于 $F_2(x_1)/\sqrt{AF_1(x_1)}>1$ 的区域，（40）式无法变成平面的度规。然而按照（17）式，不论 $F_1(x_1)$ 和 $F_2(x_1)$ 取值如何，在全空间都有 $R_{1212}=0$。因此用黎曼曲率张量描述（40）式的曲面的曲率也不可能总是正确的。

4．以上是不需要求解微分方程，直接得到 $R_{1212}=0$ 的情况，其特点是 $g_{22}=$ 常数。以下讨论需要求解微分方程的情况，此时 $g_{22}(x_1)\neq$ 常数。先讨论度规：

$$dS^2=dx_1^2+2dx_1dx_2+F(x_1)dx_2^2 \tag{46}$$

将 $g_{11}=g_{12}=1$， $g_{22}=F(x_1)$ 代入（17）式并令 $R_{1212}=0$ ，得：

$$\frac{d^2F}{dx_1^2}=\frac{1}{2(F-1)}\left(\frac{dF}{dx_1}\right)^2 \tag{47}$$

可见（46）式与（20）式是不对称的，即对于 $g_{11}=1$ 和 $g_{22}=F(x_1)$ 的度规与 $g_{11}=F(x_1)$ 和 $g_{22}=1$ 的度规，令 $R_{1212}=0$ 的结果是不一样的。（47）式的解为 $F(x_1)=ax_1^2+1$，（46）变成:

$$dS^2=dx_1^2+2dx_1dx_2+(ax_1^2+1)dx_2^2 \tag{48}$$

如果（48）式是平面度规，就有：

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)^2=1 \tag{49}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial X}{\partial x_2}+\frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial Y}{\partial x_2}=1 \tag{50}$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)^2=ax_1^2+1 \tag{51}$$

（49）式有两组基本解：

$$X=\sin x_1+f_1(x_2) \qquad Y=\cos x_1+f_2(x_2) \tag{52}$$

$$X=a_1x_1+f_3(x_2) \qquad Y=b_1x_1+f_4(x_2) \tag{53}$$

积分常数 $\sqrt{a_1^2+b_1^2}=1$。将（52）和（53）式代入（51）式，得：

$$f_1'^2(x_2)+f_2'^2(x_2)\neq ax_1^2+1 \qquad f_3'^2(x_2)+f_4'^2(x_2)\neq ax_1^2+1 \tag{54}$$

因此（48）式不能变成平面的度规。注意到如果在（46）式中令 $g_{12}=0$，（48）式就变成 $dS^2=dx_1^2+ax_1^2dx_2^2$。这是锥面的度规，它是可展曲面，有 $R_{1212}=0$，黎曼曲率张量仍然有效。事实上容易证明，要使不可展曲面的 $R_{1212}=0$，其度规必须是 $g_{12}\neq 0$ 的类型。

5．对于更一般的情况，设度规为：

$$dS^2=dx_1^2+2F_1(x_1)dx_1dx_2+F_2(x_1)dx_2^2 \tag{55}$$

将 $g_{11}=1$，$g_{12}=F_1(x_1)$ 和 $g_{22}=F_2(x_1)$ 代入（17）式并令 $R_{1212}=0$，得：

$$\frac{d^2F_2}{dx_1^2}=\frac{1}{2(F_2-F_1^2)}\left[\left(\frac{dF_2}{dx_1}\right)^2-2F_1\frac{dF_1}{dx_1}\frac{dF_2}{dx_1}\right] \tag{56}$$

随便取 $F_2(x_1)=x_1$，代入上式，得：

$$1-2F_1\frac{dF_1}{dx_1}=0 \tag{57}$$

（57）式的解是 $F_1(x_1)=\sqrt{x_1+a}$，（55）式变成：

$$dS^2=dx_1^2+2\sqrt{x_1+a}dx_1dx_2+x_1dx_2^2 \tag{58}$$

与（49）式类似，容易证明（58）式不可能完全变成平面度规，黎曼曲率张量对（58）式也是失效的，但我们不赘述。

6．对于二维度规：

$$dS^2=F_1(x_1)dx_1^2+2dx_1dx_2+F_2(x_1)dx_2^2 \tag{59}$$

将 $g_{11}=F_1(x_1)$，$g_{22}=F_2(x_1)$ 和 $g_{12}=1$ 代入（17）式，并令 $R_{1212}=0$，得：

$$-\frac{\partial^2F_2}{\partial x_1\partial x_1}+\frac{F_2}{4(F_1F_2-1)}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_2}{\partial x_1}+\frac{F_1}{4(F_1F_2-1)}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right)^2=0 \tag{60}$$

也随便取 $F_2(x_1)=x_1$，代入上式，得：

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}=-\frac{F_1}{x_1} \tag{61}$$

上式的解是 $F_1(x_1)=A/x_1$，由此可以将（59）式的度规写成：

$$dS^2=\frac{A}{x_1}dx_1^2+2dx_1dx_2+x_1dx_2^2 \tag{62}$$

如果（62）式是平面度规，就有：

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)^2=\frac{A}{x_1} \tag{63}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial X}{\partial x_2}+\frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial Y}{\partial x_2}=1 \tag{64}$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)^2=x_1 \tag{65}$$

（65）式有以下两组解：

$$X=\sqrt{x_1}\sin x_2+f_1(x_1) \qquad Y=\sqrt{x_1}\cos x_2+f_2(x_1) \tag{66}$$

$$X=a_2\sqrt{x_1}x_2+f_3(x_1) \qquad Y=b_2\sqrt{x_1}x_2+f_4(x_1) \tag{67}$$

积分常数$\sqrt{a_2^2+b_2^2}=1$。将（66）式代入（63）式，得：

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x_1}}\sin x_2+f_1'(x_1)\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{x_1}}\cos x_2+f_2'(x_1)\right)^2=\frac{A}{x_1} \tag{68}$$

要使上式成立唯有令 $f_1(x_1)=$常数， $f_2(x_1)=$常数和$A=1/2$。（66）式变成$X=\sqrt{x_1}\sin x_2+a_1$和$Y=\sqrt{x_1}\cos x_2+b_1$。将它们代入（64）式，得$X_1X_2+Y_1Y_2=0\neq 1$。将（67）式代入（63）式，得：

$$\left(\frac{a_2x_2}{2\sqrt{x_1}}+f_3'(x_1)\right)^2+\left(\frac{b_2x_2}{2\sqrt{x_1}}+f_4'(x_1)\right)^2\neq\frac{A}{x_1} \tag{69}$$

即使令 $f_3(x_1)=$常数和 $f_4(x_1)=$常数，上式也无法满足。将（67）是代入（64）式，得：

$$\frac{x_2}{2}+\sqrt{x_1}\left(a_2f_3'(x_1)+b_2f_4'(x_1)\right)\neq 1 \tag{70}$$

因此（62）式不能变成平面的度规，但我们总有$R_{1212}=0$，黎曼曲率张量对（62）式失效。

由于以上计算过程中$F_2(x_1)$是随意选择的，在一般的情况下（59）式的度规无法变成平面度规，黎曼曲率张量对（59）式一般是失效的。

7．对于更一般的二维度规：

$$dS^2=F_1(x_1)dx_1^2+F_2(x_1)dx_1dx_2+F_3(x_1)dx_2^2 \tag{71}$$

通过给定$F_2(x_1)$和$F_3(x_1)$的函数形式，代入（17）式并令$R_{1212}=0$，我们也能得到一个关于$F_1(x_1)$的微分方程。由于$F_2(x_1)$和$F_3(x_1)$可以任意选择，我们总可能找到无法完全变成平面的度规，因此用黎曼曲率张量来判断（71）式的曲率一般也是无效的。

2.3 一般性的讨论

以上讨论的是$g_{ij}=g_{ij}(x_1)$的简单情况。对于一般的二维黎曼曲面， $g_{ij}=g_{ij}(x_1,x_2)$，情况较复杂，以下做一般性的问题。我们有一个黎曼曲率张量$R_{1212}(x_1,x_2)$和三个独立的度规张量$g_{11}(x_1,x_2)$，$g_{12}(x_1,x_2)$和$g_{22}(x_1,x_2)$，其中$R_{1212}(x_1,x_2)$是由度规张量及其微分构成的函数。如果令$R_{1212}=0$，就剩两个度规张量是独立的，或者说可以是任意的。比如任意选取g_{11}和g_{22}，解微分方程$R_{1212}=0$方程可求得g_{12}。如果认为$R_{1212}=0$的曲面的空间是平直的，或者说能将曲面度规变换成平面度规的形式，则存在以下三个微分方程：

$$X_1^2+Y_1^2=g_{11} \qquad X_1X_2+Y_1Y_2=g_{12} \qquad X_2^2+Y_2^2=g_{22} \tag{72}$$

因此从方程$X_1^2+Y_1^2=g_{11}$和$X_2^2+Y_2^2=g_{22}$，我们可以确定函数X和Y。但由于g_{11}和g_{22}是任意的，X和Y也是任意的，我们一般无法使方程$X_1X_2+Y_1Y_2=g_{12}$得到满足，因此由g_{11}， g_{12}和g_{22}确定

的曲面一般不可能变换成平面的度规。然而对于该曲面我们却有 $R_{1212}=0$，因此用黎曼曲率张量来判断二维空间是否弯曲一般是无效的。

三维空间度规的一般形式为：

$$dS^2=g_{11}dx_1^2+g_{22}dx_2^2+g_{33}dx_3^2+2g_{12}dx_1dx_2+2g_{13}dx_1dx_3+2g_{23}dx_2dx_3 \tag{73}$$

有 6 个独立的度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 和三个独立的黎曼曲率张量 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$。令所有的 $R_{\alpha\beta\mu\nu}=0$，则剩下 3 个度规张量是独立的，或者说可以任意选择。比如任选 g_{12}， g_{13} 和 g_{23}，可以求得 g_{11}， g_{22} 和 g_{33}。如果（73）式能够变换成平直空间的度规，就存在以下关系：

$$X_1^2+Y_1^2+Z_1^2=g_{11} \qquad X_2^2+Y_2^2+Z_2^2=g_{22} \qquad X_3^2+Y_3^2+Z_3^2=g_{33}$$

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=g_{12} \qquad X_1X_3+Y_1Y_3+Z_1Z_3=g_{13} \qquad X_2X_3+Y_2Y_3+Z_2Z_3=g_{23} \tag{74}$$

从上式第一行的三个方程，我们可以确定三个变量 X， Y 和 Z。但由于 g_{12}， g_{13} 和 g_{23} 是任意的，上式第二行的三个方程一般不能得到满足，（73）式就不能变成平直空间的度规。而我们却有 $R_{\alpha\beta\mu\nu}=0$，因此用黎曼度规张量是否等于零来判断三维空间是否弯曲一般也是无效的。

对于四维的空间，有 10 个独立的度规张量 $g_{\alpha\beta}$，20 个独立的黎曼曲率张量 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$。一般而言，我们无法使 10 个 $g_{\alpha\beta}$ 满足 20 个 $R_{\alpha\beta\mu\nu}=0$ 的偏微分方程，但也不排除存在特例。比如我们可以把问题简化，将四维空间的度规写为：

$$dS^2=g_{11}dx_1^2+2g_{12}(x_1)dx_1dx_2+g_{22}dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2 \tag{75}$$

这个度规的第三和第四维是平直的，实际上就变成二维空间是否弯曲的问题。或者说虽然这个空间一半是平直的，另外一半是弯曲的，我们对整个空间我们仍然可以有 $R_{\alpha\beta\mu\nu}=0$。因此一般而言，我们无法用黎曼曲率张量 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ 和 $R_{\alpha\beta_\nu}{}^{\mu}$ 是否等于零来判断空间是否弯曲。

三．高斯曲面理论中的不合法曲面及其曲率

3.1 用高斯公式计算曲率有效性的条件

在高斯曲率理论中，对于二维曲面，其第一和第二基本形式是【3】:

$$I=E(u,v)du^2+2F(u,v)dudv+G(u,v)dv^2 \tag{76}$$

$$II=L(u,v)du^2+2M(u,v)dudv+N(u,v)dv^2 \tag{77}$$

高斯曲率公式与黎曼曲率张量的关系是：

$$K=\frac{MN-L^2}{EG-F^2}=\frac{R_{1212}}{EG-F^2} \tag{78}$$

用第一和第二基本形式中定义的量来表示，将（78）式具体写出来就是【3】:

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} F_{uv}-E_{vv}/2-G_{uu}/2 & E_u/2 & F_u-E_v/2 \\ F_v-G_u/2 & E & F \\ G_v/2 & F & G \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} 0 & E_v/2 & G_u/2 \\ E_v/2 & E & F \\ G_u/2 & F & G \end{vmatrix} \tag{79}$$

按照一般的看法，高斯曲面论被认为是一种内蕴的理论。理由是虽然二维曲面包含在三维平直空间中，但二维曲面的弧长、弧线的交角，面积和曲率等都可以由（76）式中的E，F和G表示。其中只包含在曲面上定义的三个基本变量E，F和G，与三维空间的存在与否无关。

然而这种看法实际上是不正确的，二维曲面不能脱离平直的三维背景空间而独立存在。以下我们证明，由于三维平直空间背景的存在，E，F和G不可能是任意的。否则用高斯公式计算曲率时，会产生严重的错误。在目前的高斯几何与黎曼几何中，E，F和G一般被看成相互独立的。但E，F和G之间的不独立性恰恰说明，所谓的高斯几何的内蕴特征实际上是不存在的。

以（29）式的度规为例，将其改写为：

$$dS^2 = Adu^2 + 2F(u)dudv + Bdv^2 \tag{80}$$

将$E = A$，$G = B$和$F = F(u)$代入（79）式，可得$K = 0$。然而如前讨论，在一般的情况下（29）式不可能完全变成平面度规，高斯曲率不可能为零。问题出在哪里呢，难道高斯曲率公式错了？问题在于（29）式的曲面在高斯理论中一般是不合法的，用高斯曲率计算曲率一般是无效的。

为此，我们需要考察高斯曲面论中二维曲面与三维平直空间的关系。三维平直空间的度规为：

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 \tag{81}$$

设此空间中有一个二维曲面，方程为：

$$Z = \mathrm{Z}(X,Y) \tag{82}$$

如果曲面上点的坐标用参数u和v来表示，即令$X = X(u,v)$，$Y = Y(u,v)$，$Z = Z(u,v)$，可得$dX = X_u du + X_v dv$，$dY = Y_u du + Y_v dv$和$dZ = Z_u du + Z_v dv$。将这些关系代入（81）式，再与（80）式比较，就得到：

$$X_u^2 + Y_u^2 + Y_u^2 = E \qquad X_u X_v + Y_u Y_v + Z_u Z_v = F \qquad X_v^2 + Y_v^2 + Y_v^2 = G \tag{83}$$

它们是关于三个变量X，Y和Z 的一阶二次偏微分方程组。由于受（82）式的约束，X，Y和Z只有两个是独立的，E，G和F中也只有两个是独立的。

如果我们选择三个任意函数E，G和F，按高斯曲面论的第一基本形式构造一个曲面，这个曲面在三维空间中也可以存在。但它们的度规就不能写成（81）式的形式，而是变成以下形式：

$$dS^2 = G_{11}dX^2 + G_{22}dY^2 + G_{33}dZ^2 + G_{12}dXdY + G_{13}dXdZ + G_{23}dYdZ \tag{84}$$

换句话说，该曲面在三维空间中的度规仍然是弯曲的，这种曲面在高斯曲面论中就是不合法的。

因此判断一个二维曲面在高斯理论中是否合法，就要看是否存在一个变换，能将它的度规变成三维平直空间中的度规。如果这样的变换存在，这个二维曲面就是合法的。如果找不到这样的变换，这个曲面就是不合法的。高斯曲率只对合法的曲面有效，对不合法的曲面是无效的。

3. 2 高斯曲面论中不合法曲面的实例

以下证明我们一般不可能将（80）式变成（81）式的形式，因此（80）式的曲面在高斯几何中

是不合法的。事实上如果（80）式能变换成（81）式，就有：

$$X_u^2+Y_u^2+Z_u^2=A \tag{85}$$

$$X_uX_v+Y_uY_v+Z_uZ_v=F(u) \tag{86}$$

$$X_v^2+Y_v^2+Z_v^2=B \tag{87}$$

（85）和（87）式有一组共同的解：

$$X=a_1u+b_1v \qquad Y=a_2u+b_2v \qquad Z=a_3u+b_3v \tag{88}$$

积分常数 $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=A$，$\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}=B$。将（88）式代入（86）是，得：

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\neq F(u) \tag{89}$$

（85）式还有两组解：

$$X=\sqrt{A}\sin u\cos v \qquad Y=\sqrt{A}\sin u\sin v \qquad Z=\sqrt{A}\cos u$$

$$X=au\cos v \qquad Y=au\sin v \qquad Z=cu \tag{90}$$

积分常数 $\sqrt{a^2+c^2}=A$，但它们都不是（86）和（87）式的解。除此之外，（85）~（87）式还有一组特解：

$$X=Z=\sqrt{A/2}\int F(u)du+\sqrt{B/2}v \qquad Y=\sqrt{A}\int\sin(\arccos F(\mathrm{u}))du \tag{91}$$

我们有 $X_u=Z_u=\sqrt{A/2}F(u)$，$X_v=Z_v=\sqrt{B/2}$，$Y_u=\sqrt{A}\sin(\arccos F(\mathrm{u}))$ 和 $Y_v=0$。与（39）式的计算类似，可证（91）式满足（85）和（87）式。将它代入（86）式，得：

$$X_uX_v+Y_uY_v+Z_uZ_v=\sqrt{AB}F(u) \tag{92}$$

然而要使(91)式中的 Y 有意义，就必须满足 $|F(u)|\leq 1$。将(92)式与(86)式比较，还必须有 $\sqrt{AB}=1$。在 $|F(u)|>1$ 的区间或 $\sqrt{AB}\neq 1$ 的情况下，（80）式不能变换成三维平直空间的度规。

因此在高斯理论中，（80）式的曲面在某些情况下是不合法的。用高斯曲率公式计算，就可能得到 $K=0$ 错误结果。高斯曲率公式对这种曲面无效，但错不在高斯公式，而在曲面本身。原因是三维空间中存在约束关系（82）式，曲面第一基本形式中的函数 E，F，G 不是互相独立的。而曲面（80）是随意构造出来的，我们随意选择 $E=A$，$G=B$ 和 $F=F(u)$，它们之间一般没有关联。

用相同的方法可以证明，（20），（40），（48），（58）和（62）式都不能变换成三维平直空间的度规。在高斯理论中，它们都是不合法的曲面。用高斯曲率公式计算，结果都是 $K=0$。然而它们都是真正的曲面，应该有 $K\neq 0$。对于不合法曲面，高斯微分几何中许多公式，包括曲面面积，曲线夹角，以及曲面曲率等都不能用。

可见高斯理论中合法的曲面与三维平直空间背景有关，不可能是内蕴的。强调这一点是非常重要的，黎曼几何没有这种背景，其度规张量 $g_{\mu\nu}$ 可以是任意的。只要满足连续可微条件，黎曼几何中的曲面都是合法的，我们并不要求 N 维弯曲空间包含在更高维的平直空间中。因此如果黎曼曲率张量不能正确描述 N 维弯空间曲率，问题就在曲率张量本身，不可能说该曲面不合法和没有意义。

3. 3 高斯曲面论中不合法曲面的几何意义

高斯曲面理论需要假定二维曲面存在于三维欧氏空间中，曲面方程用（82）式表示。由于只有两个坐标是独立的，曲面上点的坐标可以写成矢量形式：

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)=X(u,v)\vec{i}+Y(u,v)\vec{j}+Z(u,v)\vec{k} \tag{93}$$

式中 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 是欧式空间的固定基矢。例如，球面坐标可以写为：

$$\vec{r}=R\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i}+R\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}+R\cos\theta\,\vec{k} \tag{94}$$

将（94）式对 u 和 v 求导，得：

$$\vec{r}_u=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=X_u\vec{i}+Y_u\vec{j}+Z_u\vec{k}=\vec{r}_1(u,v) \tag{95}$$

$$\vec{r}_v=\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=X_v\vec{i}+Y_v\vec{j}+Z_v\vec{k}=\vec{r}_2(u,v) \tag{96}$$

$\vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_v$ 代表曲面点切平面上沿 u 方向和 v 方向的切向量，在（76）式中，我们令：

$$E=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u \qquad F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v \qquad G=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v \tag{97}$$

因此高斯几何实际上是建立在平直空间固定基矢的基础上的。除此之外，还要定义曲面的法方向。设 $\vec{n}$ 是曲面在给定点的单位法向量，高斯将其定义为【3】:

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} \tag{98}$$

引入单位法向量后，（77）式中的 L, M，N 写为：

$$L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}_u \qquad M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}_v=-\vec{r}_v\cdot\vec{n}_u \qquad N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}=-\vec{r}_v\cdot\vec{n}_v \tag{99}$$

如果任意给定一个二维曲面的第一基本形式，其中的 g_{ij}（即 E，F，G）不满足（72）式，就意味着该曲面所在的三维空间不是平直的，或者说该曲面是三维弯曲空间中的二维曲面。由于在三维弯曲空间中二维曲面上的点无法用（82）式表示，就不存在（97）~（99）式，高斯理论中大部分公式对该曲面都是无效的。

现有的几何理论就有这方面的例子，例如按照希尔伯特定理，双曲平面不能等距嵌入到三维欧氏空间去，但可以等距嵌入到 5 维欧氏空间。这实际上说明双曲平面在高斯理论中是非法曲面，用高斯微分几何公式无法计算曲率等几何量是无效的。

四．黎曼几何与高斯微分几何的不一致性

4. 1 黎曼曲率公式与高斯曲率公式

在黎曼几何中，N 维空间某点上黎曼曲率的定义则是：

$$K_l=\frac{R_{\alpha\beta\sigma\rho}p^\alpha q^\beta p^\sigma q^\rho}{(g_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}-g_{\sigma\beta}g_{\alpha\rho})p^\alpha q^\beta p^\sigma q^\rho} \tag{100}$$

它与空间某点上的 N 维矢量 $\vec{p}$ 和 $\vec{q}$ 的选取有关，在二维情况下 $\vec{p}$ 和 $\vec{q}$ 各有两个分量。对 p_1，p_2，q_1 和 q_2 求和，（100）式就变成（78）式。因此二维空间的黎曼几何只给出一个曲率张量 R_{1212}，只能构

造一个标量曲率，它是没有方向性的。

在高斯理论中，二维曲面的曲率则是一个很复杂的概念。二维曲面的曲率有主曲率，法曲率和平均曲率等几种情况。在曲面上某点的主曲率由下式确定：

$$(EG-F^2)\ k^2-(LG-2MF+NE)k+(LN-M^2)=0 \tag{101}$$

该方程有两个解，最大曲率 k_1 和最小曲率 k_2：

$$k_1=\frac{(LG-2MF+NE)+\sqrt{(LG-2MF+NE)^2-4(EG-F^2)(LN-M^2)}}{2(EG-F^2)} \tag{102}$$

$$k_2=\frac{(LG-2MF+NE)-\sqrt{(LG-2MF+NE)^2-4(EG-F^2)(LN-M^2)}}{2(EG-F^2)} \tag{103}$$

高斯曲率定义为二者的乘积 $K=k_1k_2$，也就是（78）式。需要注意的是，乘积 $K=k_1k_2$ 本身是没有测量意义的。只有单独的 k_1 和 k_2 才是有测量意义的，代表曲面的真正曲率。除此之外，高斯几何中还定义了平均曲率：

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)} \tag{104}$$

但它也不是真正的可测量曲率。在任意方向上，曲面的曲率称为法曲率：

$$K_n=\frac{II}{I}=\frac{L(u,v)du^2+2M(u,v)dudv+N(u,v)dv^2}{E(u,v)du^2+2F(u,v)dudv+G(u,v)dv^2} \tag{105}$$

这是一个用微分关系来表示的，有方向性的几何量。

4.2 黎曼曲率公式与高斯曲率公式的不一致性

按照流行的看法，黎曼几何被看成是欧几里得几何在高维弯曲空间的扩展，也可以说是比高斯微分几何更高级的空间理论。黎曼流形可以独立存在，我们不需要把黎曼弯曲空间嵌入更高维的平直空间。在低维空间中，黎曼几何被认为与高斯几何是一致的，包容了高斯理论的结果。在二维弯曲空间的情况下，黎曼几何中导出的曲率公式与高斯曲率公式具有相同的形式，我们就认为黎曼几何与高斯几何是一致的。然后将此结果推广到高维空间，认为黎曼曲率张量能正确描述高维弯曲空间的曲率。除此之外，黎曼几何被认为还包容了罗巴切夫斯基几何等非欧几何，是现有空间几何理论的最高形式。

然而黎曼几何与高斯微分几何的出发点是不同的，二者却能完全一致，这个结果是令人怀疑的。以下我们指出，黎曼几何与高斯几何实际上是不一致的。

1. 在高斯微分几何中，曲线的曲率一个非常重要问题，它构成了高斯微分几何的一大部分。但在黎曼几何中，最简单的曲率张量 R_{1212}，它只描述二维曲面的曲率。黎曼几何根本没有相应的曲率张量，可以描述二维平面上曲线的曲率和三维空间中曲线的曲率和挠率。

比如按照高斯微分几何，三维平直空间中曲线的曲率公式为 $k=|\vec{r}'\times\vec{r}''|/|\vec{r}'|^3$，挠率公式为 $\tau=(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')/(\vec{r}'\times\vec{r}'')^2$，其中参数方程 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 式定义在三维欧氏空间中的。对于这类问题，黎曼几何完全无能为力。如果没有高维平直空间作为背景，我们甚至无法定义一维曲线，更谈不上建立一维弯曲空间理论。事实上我们至今没有一维弯曲空间的黎曼几何，怎么能说黎曼几何与高斯几何

一致，并包容了高斯几何呢？

2. 对于二维曲面，按（100）式，黎曼曲率在形式与高斯曲率一样，但它们意义实际上是完全不同的。在黎曼几何中，二维曲面的曲率 K_l 就等于乘积 k_1k_2，我们不能分离 k_1 和 k_2 。也就是说按照黎曼几何，在二维曲面上某点的曲率是 k_1k_2，而不是 k_1 和 k_2，这与高斯几何的理解是完全不同的。由于高斯理论中的 k_1 和 k_2 是有测量意义的，黎曼几何的二维曲面曲率就是错误的。

3. 在高斯理论中，二维曲面一般的曲率公式（105）是有方向的。但二维黎曼几何的曲率（100）式只有一个独立的分量 R_{1212}，是没有方向性的。高斯曲面理论中各种各样、丰富多彩的曲率在黎曼几何中根本得不到体现。事实上只有在球面的情况下，二维曲面才只有一个标量曲率。在其他情况下，二维曲面不可能只有一个曲率。在这一点上黎曼几何不但与高斯几何不一致，而且显然是违背几何学的基本常识。

事实上，但为了能与高斯几何一致，黎曼几何引入了许多不合理的，甚至完全错误的假定。即使如此，黎曼几何与高斯几何仍然无法达到一致。以下我们复述从高斯几何理论导出（78）式的过程，来进一步讨论这个问题。

4. 3 从高斯曲面理论推导二阶曲率张量

高斯曲面论将 $\vec{r}_u$，$\vec{r}_v$ 和 $\vec{n}$ 看成三维空间中新的基向量，将 $\vec{r}$ 的二次导数 $\vec{r}_{ij}$ 和 $\vec{n}$ 的一次导数以 $\vec{r}_u$，$\vec{r}_v$ 和 $\vec{n}$ 为基展开，并证明存在以下关系【3】:

$$\vec{r}_{ij}=\sum_{k=1}^{2}\Gamma'^{k}_{ij}\vec{r}_k+L_{ij}\vec{n} \tag{106}$$

$$\vec{n}_i=-\sum_{j,k=1}^{2}L_{ik}g'^{kj}\vec{r}_j \tag{107}$$

（106）式称为高斯方程，（107）式称为 Weingarten 方程。其中：

$$g'_{11}=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u=E \qquad g'_{12}=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v=F \qquad g'_{22}=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v=G \tag{108}$$

$g'_{ij}g'^{ik}=\delta^k_j$，以及：

$$\Gamma'^{1}_{11}=\frac{GE_u-F(2F_u-E_v)}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma'^{1}_{12}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma'^{1}_{22}=\frac{G(2F_v-G_u)-FG_v}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma'^{2}_{11}=\frac{E(2F_u-E_v)-FE_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma'^{2}_{12}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma'^{2}_{22}=\frac{EG_v-F(2F_v-G_u)}{2(EG-F^2)} \tag{109}$$

将（106）式再次求导，得：

$$(\vec{r}_{ij})_k=\sum_{l=1}^{2}\left(\frac{\partial\Gamma'^{l}_{ij}}{\partial u^k}\vec{r}_l+\Gamma'^{l}_{ij}\vec{r}_{lk}\right)+\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}\vec{n}+L_{ij}\vec{n}_k \tag{110}$$

式中 Γ^l_{ij} 是克里斯托费尔符号，又称为联络。再将（106）和（107）式代入（110）式，得：

$$\vec{r}_{ijk}=\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial\Gamma'^{l}_{ij}}{\partial u^k}\vec{r}_l+\sum_{l,m=1}^{2}\Gamma'^{l}_{ij}\Gamma'^{m}_{lk}\vec{r}_m+\sum_{l=1}^{2}\Gamma'^{l}_{ij}L_{lk}\vec{n}+\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}\vec{n}-\sum_{m,l=1}^{2}g'^{lm}L_{ij}L_{mk}\vec{r}_l \tag{111}$$

类似地，可以得到：

$$\vec{r}_{ikj}=\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial\Gamma_{ik}'^{l}}{\partial u^{k}}\vec{r}_{l}+\sum_{l,m=1}^{2}\Gamma_{ik}'^{l}\Gamma_{lj}'^{m}\vec{r}_{m}+\sum_{l=1}^{2}\Gamma_{ik}'^{l}L_{lj}\vec{n}+\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^{j}}\vec{n}-\sum_{m,l=1}^{2}L_{ik}g'^{lm}L_{mj}\vec{r}_{l} \tag{112}$$

考虑到微分运算的对易性，有：

$$\vec{r}_{ijk}=\frac{\partial^{3}\vec{r}}{\partial u^{i}\partial u^{j}\partial u^{k}}=\frac{\partial^{3}\vec{r}}{\partial u^{i}\partial u^{k}\partial u^{j}}=\vec{r}_{ikj} \tag{113}$$

将（111）和（112）式代入（113）式两边，经过整理后得到：

$$\sum_{l=1}^{2}\left[\frac{\partial\Gamma_{ij}'^{l}}{\partial u^{k}}-\frac{\partial\Gamma_{ik}'^{l}}{\partial u^{k}}+\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\Gamma_{ij}'^{\alpha}\Gamma_{\alpha k}'^{l}-\Gamma_{ik}'^{\alpha}\Gamma_{\alpha j}'^{l}\right)-\sum_{\beta=1}^{2}g'^{l\beta}\left(L_{ij}L_{\beta k}-L_{ik}L_{\beta j}\right)\right]\vec{r}_{l}$$
$$+\left[\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^{k}}-\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^{j}}-\sum_{l=1}^{2}\left(\Gamma_{ik}'^{l}L_{ij}-\Gamma_{ij}'^{l}L_{ik}\right)\right]\vec{n}=0 \tag{114}$$

由于 $\vec{r}_1$， $\vec{r}_2$ 和 $\vec{n}$ 是线性无关的，要使上式成立，只有令：

$$\frac{\partial\Gamma_{ij}'^{l}}{\partial u^{k}}-\frac{\partial\Gamma_{ik}'^{l}}{\partial u^{k}}+\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\Gamma_{ij}'^{\alpha}\Gamma_{\alpha k}'^{l}-\Gamma_{ik}'^{\alpha}\Gamma_{\alpha j}'^{l}\right)-\sum_{\beta=1}^{2}g'^{l\beta}\left(L_{ij}L_{\beta k}-L_{ik}L_{\beta j}\right)=0 \tag{115}$$

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^{k}}-\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^{j}}-\sum_{l=1}^{2}\left(\Gamma_{ik}'^{l}L_{ij}-\Gamma_{ij}'^{l}L_{ik}\right)=0 \tag{116}$$

（116）式就是所谓的科达奇-迈因纳尔迪（Codazzi-Mainardi）公式。将（115）式写为：

$$R_{ijk}'^{l}=\frac{\partial\dot{\Gamma}_{ij}^{l}}{\partial u^{k}}-\frac{\partial\Gamma_{ik}'^{l}}{\partial u^{k}}+\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\Gamma_{ij}'^{\alpha}\Gamma_{\alpha k}'^{l}-\Gamma_{ik}'^{\alpha}\Gamma_{\alpha j}'^{l}\right)=\sum_{\beta=1}^{2}g'^{l\beta}\left(L_{ij}L_{\beta k}-L_{ik}L_{\beta j}\right) \tag{117}$$

$R_{ijk}'^{l}$ 被称为曲率张量，我们将它加撇是为了与黎曼几何中的 R_{ijk}^{l} 进行区分。将上式乘上 $g_{m}'^{l}$ 并对 l 指标缩并，得到高斯理论的曲率张量的协变形式：

$$R_{mijk}'=L_{ij}L_{mk}-L_{ik}L_{mj} \tag{118}$$

由于上式中指标只对 1 和 2 求和，在这种情况下独立的 R_{mijk}' 只有一个，即：

$$R_{1212}'=L_{12}L_{12}-L_{11}L_{22}=-(LN-M^{2}) \tag{119}$$

于是就得到高斯曲率与曲率张量的关系（78）式。

以上就是高斯微分几何导出黎曼曲率张量的过程。虽然得到的曲率张量 R_{1212}' 与黎曼几何的曲率张量具有相同的形式，但推导过程涉及的所有的量都是在高斯理论中定义，具有平直空间背景的，因此与真正的弯曲空间中的黎曼曲率张量在本质上仍然是有区别的。

首先，为了得到（117）式，高斯几何还必须引入（116）式，但在黎曼几何中这个公式是不存在的。在二维黎曼弯曲空间中，没有法向分量 $\vec{n}$ 这种概念。结果使许多实际问题无法处理，导致二维弯曲空间的黎曼几何无法与三维平直空间中高斯曲面理论一致。

其次，也是更要命的是，高斯几何理论中度规张量的定义是 $g_{ij}'=\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j$。而黎曼几何中，度规张量的定义是 $g_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$。由于高斯几何采用固定坐标系，黎曼几何采用活动标架，二者的基向量 $\vec{r}_i$ 和

$\bar{e}_i$ 是不同的。因此高斯几何中的 g'_{ij} 和 Γ'^{i}_{jk} 与黎曼几何中的 g_{ij} 和 Γ^{i}_{jk} 是不同，高斯曲面理论中的 R'_{1212} 与黎曼几何中的 R_{1212} 实际上是不一样的。由此从根本上证明高斯微分几何与黎曼几何是不一致的，我们在下一章详细讨论这个问题。

五．黎曼几何空间度规的正确形式

5. 1 黎曼几何的度规与联络

黎曼几何使用局部活动标架参考系，位置向量的微分定义为 $d\bar{r}=\bar{e}_i dx^i$。任意维弯曲空间两点之间微分弧长的平方（即空间度规）定义为：

$$dS^2 = d\bar{r}\cdot d\bar{r} = \bar{e}_i\cdot\bar{e}_j dx^i dx^j = g_{ij}dx^i dx^j \tag{120}$$

黎曼 1854 年首先提出用（120）式来度量弯曲空间，建立了黎曼几何的基础。式中 $\bar{e}_i$ 为局部活动标架基向量，它与度规张量的关系为 $\bar{e}_i\cdot\bar{e}_j = g_{ij}$，对 $\bar{e}_i$ 的微分则定义为【1】：

$$d\bar{e}_i = \frac{\partial\bar{e}_i}{\partial x^k}dx^k = \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial x^i\partial x^k}dx^k \tag{121}$$

与高斯方程（106）式对应，将位置向量的二次导数按局部标架基向量展开，令：

$$\bar{r}_{ik} = \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial x^i\partial x^k} = \frac{\partial\bar{e}_i}{\partial x^k} = \Gamma^{l}_{ik}\bar{e}_l \tag{122}$$

（112）式就是黎曼几何中联络 Γ^{j}_{ik} 的定义，它表示局部标架基向量对坐标的导数按标架基向量展开时，展开系数为 Γ^{j}_{ik}。将它代入（121）式，得：

$$d\bar{e}_i = \frac{\partial\bar{e}_i}{\partial x^k}dx^k = \Gamma^{l}_{ik}\bar{e}_l dx^k \tag{123}$$

另一方面，将关系 $\bar{e}_k\cdot\bar{e}_l = g_{kl}$ 求导，得【1】：

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} &= \frac{\partial\bar{e}_k}{\partial x^m}\cdot\bar{e}_l + \bar{e}_k\cdot\frac{\partial\bar{e}_l}{\partial x^m} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial x^k\partial x^m}\cdot\bar{e}_l + \bar{e}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}}{\partial x^l\partial x^m}\\ &= \Gamma^{p}_{km}\bar{e}_p\cdot\bar{e}_l + \Gamma^{q}_{lm}\bar{e}_k\cdot\bar{e}_q = \Gamma^{p}_{km}g_{pm} + \Gamma^{q}_{lm}g_{qk}\end{aligned} \tag{124}$$

同理得：

$$\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^l} = \Gamma^{p}_{kl}g_{pm} + \Gamma^{q}_{mk}g_{ql} \qquad\qquad \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} = \Gamma^{p}_{ml}g_{pk} + \Gamma^{q}_{kl}g_{qm} \tag{125}$$

再考虑 $g_{kl}g^{lm}=\delta^m_k$，按（124）和（125）式，就可以得到用度规张量表示的联络：

$$\Gamma^{q}_{km} = \frac{1}{2}g^{lq}\left(\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l}\right) \tag{126}$$

5. 2 黎曼几何度规的正确形式

然而应当指出的是，黎曼几何采用（120）式作为空间度规是不正确的。黎曼几何认为可以在 N 维弯曲空间的某点上建立局部参考系，在该参考系上任意向量表示为：

$$\bar{A} = A^1\bar{e}_1 + A^2\bar{e}_2 + \cdots A^N\bar{e}_N = A^i\bar{e}_i \tag{127}$$

其中 A^i 是向量在 $\bar{e}_i$ 方向上的分量。如果 A^i 是局部参考系上某空间点的坐标，（127）式就变为：

$$\bar{r} = x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2 + \cdots + x^N\bar{e}_N = x^N\bar{e}_N \tag{128}$$

上式与高斯曲面论的（93）式对应，表示在 N 维黎曼弯曲空间，以任意空间点为坐标原点，可以建立局部坐标系。在该坐标系原点的邻域，某空间点的位置向量可以用（128）式表示。例如，如果我们讨论的是二维黎曼曲面，$x^1\bar{e}_1$ 和 $x^2\bar{e}_2$ 就表示该曲面某点的切平面上位置向量的分量。在该平面上 $\bar{e}_1$ 和 $\bar{e}_2$ 是不变的，就有 $d\bar{r} = \bar{e}_1 dx^1 + \bar{e}_2 dx^2$ ，以及：

$$dS^2 = d\bar{r}\cdot d\bar{r} = g_{ij}dx^i dx^j = g_{11}dx^1dx^1 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}dx^2dx^2 \tag{129}$$

将上式推广，在任意维黎曼弯曲空间的切空间中，微分弧长平方就可以用（120）式表示。

黎曼几何的问题在于，认为弯曲空间中的相邻两点（不是切空间中的两点）的微分弧长平方也用（120）式定义。这显然是不正确的，因为在这种情况下标架基向量 $\bar{e}_i$ 不是常数，就有 $d\bar{r} \neq \bar{e}_i dx^i$ 。事实上如果弯曲空间中相邻两点的微分弧长平方用（120）式定义，就意味着将黎曼弯曲空间与其切空间等价了。事实上由于使用活动标架参考系，就应当有：

$$d\bar{r} = \bar{e}_i dx^i + x^i d\bar{e}_i \tag{130}$$

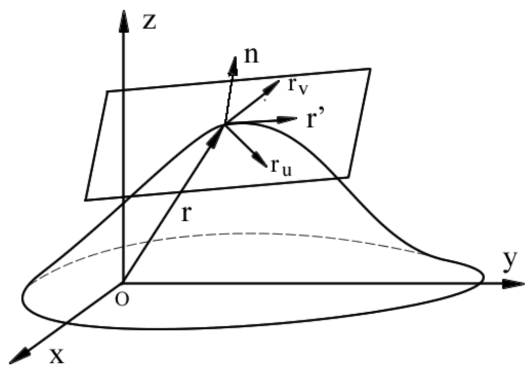
因此黎曼空间的度规应当是：

$$dS^2 = d\bar{r}\cdot d\bar{r} = \bar{e}_i\cdot\bar{e}_j dx^i dx^j + 2x^i\bar{e}_i\cdot d\bar{e}_j dx^j + x^i x^j d\bar{e}_i\cdot d\bar{e}_j \neq g_{ij}dx^i dx^j \tag{131}$$

为了更清楚地看出这个问题，我们将黎曼几何与高斯几何的描述方式进行比较。高斯曲面论的前提是，二维曲面存在于三维平直空间中。如图 1 所示，在三维欧氏空间中，我们先建立笛卡尔坐标系。曲面上点的位置由三维向量 $\bar{r} = \bar{r}(X,Y,Z) = \bar{r}(u,v)$ 描述，有 $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$ 。图中 $\bar{r}'$ 代表曲面上某点的切平面上的切向量， $\bar{r}_u$ 和 $\bar{r}_v$ 是切向量 $\bar{r}'$ 沿坐标 u 和 v 坐标曲线方向的分量。曲面上微分弧长的平方是：

$$dS^2 = d\bar{r}\cdot d\bar{r} = \bar{r}_1\cdot\bar{r}_1(dx^1)^2 + 2\bar{r}_1\cdot\bar{r}_2 dx^1dx^2 + \bar{r}_2\cdot\bar{r}_2(dx^2)^2 \tag{132}$$

由于 $\bar{r} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$ 是在三维欧氏空间定义的，基矢 $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ 是固定不变的，微分运算时都取 $d\bar{i} = d\bar{j} = d\bar{k} = 0$ 。因此曲面上切向量 $\bar{F}_u$ 和 $\bar{F}_v$ 是以固定基矢 $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ 为基准的，对 $\bar{F}_u$ 和 $\bar{F}_v$ 做进一步微分时，基矢 $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ 仍然不变， $\bar{F}_{uu}$ ， $\bar{F}_{uv}$ 和 $\bar{F}_{vv}$ 仍然以固定坐标为基准。也就是说高斯几何实际上是建立在固定基矢基础上的，这与黎曼几何使用活动标架是完全不同的。正是由于这种不同性，使二者度规的定义必然有很大的差别。



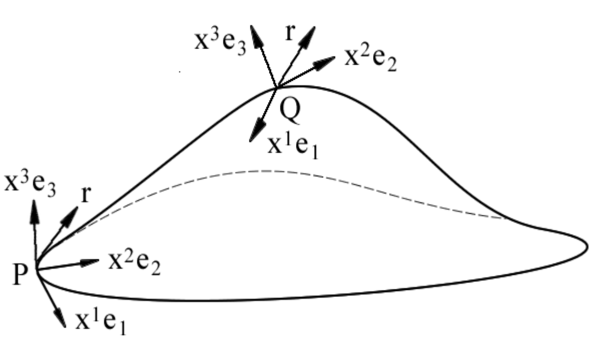


图 1. 三维欧氏空间中高斯几何的曲面坐标系　　图 2. 三维黎曼弯曲空间中的局部标架坐标系

黎曼几何认为弯曲空间可以没有更高维平直空间背景而独立存在，然而这在现实中是不可能的。如果没有三维平直空间为背景，我们连二维曲面也无法想象。事实上，黎曼几何讨论二维弯曲空间时，总是将它画在三维平直空间中。为了讨论黎曼几何的局部标架参考系，本文也按约定俗成，将二维黎曼曲面画在三维平直空间中。

如图 2 所示，令 $x^1\bar{e}_1$，$x^2\bar{e}_2$ 和 $x^3\bar{e}_3$ 代表黎曼几何三维局部活动标架参考系的切空间中向量 $\bar{r}$ 的分量。在二维弯曲空间（而不是切空间）中，标架基向量 $\bar{e}_i$ 是变量。当坐标产生 dx^i 变化时，标架基向量也应当有 $d\bar{e}_i$ 的变化，　利用（123）式，我们有：

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^k}dx^k = \frac{\partial (x^i\bar{e}_i)}{\partial x^k}dx^k = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^k}\bar{e}_i + x^i\frac{\partial \bar{e}_i}{\partial x^k}\right)dx^k$$

$$= (\delta_{ik}\bar{e}_i + x^i\Gamma_{ik}^j\bar{e}_j)dx^k = (\bar{e}_k + x^i\Gamma_{ik}^j\bar{e}_j)dx^k \qquad (133)$$

可见 $\bar{e}_1 + x^i\Gamma_{i1}^j\bar{e}_j$ 与图 1 中的 $\bar{r}_u$ 等价，$\bar{e}_2 + x^i\Gamma_{i2}^j\bar{e}_j$ 与图 1 中 $\bar{r}_v$ 等价，因此 $\bar{e}_1$ 和 $\bar{e}_2$ 与 $\bar{r}_u$ 和 $\bar{r}_v$ 就不等价，我们有:

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = g_{ij} \neq g'_{ij} = \bar{r}_i \cdot \bar{r}_j \qquad (134)$$

事实上在高斯理论中 $\bar{r}_u$ 和 $\bar{r}_v$ 是 $\bar{r}$ 的导数，在黎曼几何中 $\bar{e}_1$ 和 $\bar{e}_2$ 是基向量，它们的意义是不一样的。将 $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = g_{ij}$ 和（123）式代入（131）式，得：

$$dS^2 = (g_{jk} + 2x^i g_{jl}\Gamma_{ik}^l + x^i x^l g_{pq}\Gamma_{ik}^p\Gamma_{lj}^q)dx^j dx^k = G_{jk}dx^j dx^k \qquad (135)$$

由于 dS^2 是不变量，G_{ij} 就构成张量。因此在采用活动标架的黎曼几何中，真正的度规张量应当是：

$$G_{jk} = g_{jk} + 2x^i g_{jl}\Gamma_{ik}^l + x^i x^l g_{pq}\Gamma_{ik}^p\Gamma_{lj}^q \qquad (136)$$

其中 g_{ij} 与 Γ_{jk}^i 的关系仍然满足（126）式。此结果说明，与其他几何量的微分过程会出现联络的情况一样，黎曼几何中弧长的微分过程也应当出现 Γ_{jk}^i。

我们举一个具体例子，来说明（135）式与高斯微分几何理论第一基本式的关系。按照高斯曲面论，半径为 a 的球面度规用（18）式表示，我们有 $g'_{11} = a^2$，$g'_{12} = 0$ 和 $g'_{22} = a^2\sin^2\theta$。如果在黎曼几何中描述相同的球面，按照（135）式，度规则变为：

$$dS^2 = (g_{jk} + 2x^i g_{jl}\Gamma_{ik}^l + x^i x^l g_{pq}\Gamma_{ik}^p\Gamma_{lj}^q)dx^j dx^k = G_{jk}dx^j dx^k \qquad (137)$$

就有：

$$g_{11} + 2x^i g_{1l}\Gamma_{i1}^l + x^i x^l g_{pq}\Gamma_{i1}^p\Gamma_{l1}^q = a^2 \qquad (138)$$

$$g_{12} + 2x^i g_{1l}\Gamma_{i2}^l + x^i x^l g_{pq}\Gamma_{i2}^p\Gamma_{l1}^q = 0 \qquad (139)$$

$$g_{22} + 2x^i g_{2l}\Gamma_{i2}^l + x^i x^l g_{pq}\Gamma_{i2}^p\Gamma_{l2}^q = a^2\sin^2\theta \qquad (140)$$

由于 Γ_{ki}^p 由（126）式确定，（138）~（140）式是关于 g_{ij} 的一阶非齐次微分方程组。通过解方程组得到的 g_{ij} 与高斯曲面论的 g'_{ij} 是不同的，其形式比高斯理论的形式复杂得多。

需要强调的是，球面度规（18）式是在三维平直空间背景下的结果。如果没有通过高斯理论得

到球面度规 g'_{ij}，就根本无法在黎曼几何中确定其对应的形式。这个结论具有普遍意义，对于任意曲面情况都是如此。它再次说明几何学是描述现实空间的，如果没有现实的欧几里得空间背景，我们实际上根本没有办法建立独立的弯曲空间黎曼几何。

5. 3 新的黎曼度规的几何意义

黎曼几何中我们知道，在空间的某个固定点上，比如图 2 中的 P 点，总可以选择适当的坐标使联络 $\Gamma^i_{jk}=0$。以这个点为局部坐标原点建立切空间，在此切空间中微分弧长可以用（120）式表示。然而如果我们考虑的点不在 P 点的邻域，比如在图 2 中的 Q 点，其局部标架与 P 点的局部标架是不一样的。标架不一样意味着度量的标准不一样，不同空间点的量就无法进行比较。

为了使度量有统一的标准，就必须考虑不同空间点上标架的变化。如果讨论的是全局性问题，比如计算黎曼空间的曲线长度，曲面面积等非无穷小量时，就必须考虑标架在空间不同点发生的变化，因此黎曼几何必须使用（135）式的度规。事实上黎曼几何也需要建立空间坐标原点的概念，就像在欧氏几何中需要建立空间坐标原点。我们可以任意选择黎曼几何的标架原点，在该点上令联络 $\Gamma^p_{ki}=0$，度规用（120）式表示。在其他空间点上联络不等于零，度规用（135）式表示，不同点之间的度规通过 Γ^p_{ki} 相联系。

因此目前的黎曼几何采用（123）式作为空间度规是不行的，它导致黎曼几何的许多基础性的错误。最基本的一个问题是，由于 g'_{ij} 与 g_{ij} 不一样，高斯方程中的 Γ'^i_{jk} 与黎曼几何中的 Γ^i_{jk} 实际上不一样。因此高斯曲面理论中得到的 R'_{1212} 与黎曼几何中的 R_{1212} 不一样，虽然从表面上看二者的形式完全一样。由此可见，黎曼几何与高斯微分几何是不可能达到一致。

事实上，即使不考虑度规的定义问题，高斯方程（106）式中的 Γ'^i_{jk} 与黎曼几何中（122）式中的 Γ^i_{jk} 也是不同的。原因是（106）式中三维基向量 $\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$ 和 $\vec{n}$ 的地位是不对称的，以 $\vec{r}_1$ 和 $\vec{r}_2$ 为基的展开系数 Γ^i_{jk} 与 $\vec{n}$ 为基的展开系数 L_{ij} 是不一样的。如果同样考虑三维弯曲空间，在黎曼几何局部标架展开（122）式中，三维空间的基 $\vec{e}_i$ 是对称的，展开系数 Γ^i_{jk} 是对称的。如果考虑的是二维弯曲空间，（106）式中的基 $\vec{r}_k$ 与（122）式中的基 $\vec{e}_i$ 也是不一样的。由于这种不同性，高斯几何与黎曼几何的联络也是不一样的，导致黎曼几何的 R_{1212} 与高斯几何的 R'_{1212} 实际上不一样。

事实上（117）和（118）式只是高斯理论的结果，与黎曼几何无关。（117）和（118）式是在三维平直空间的背景下得到的，黎曼几何讨论二维曲面只需要二维空间。其根本的原因在于，高斯理论中曲面和平面的概念是分得很清楚的。二维曲面存在于三维空间中，在曲面上可以建立切平面。切平面上的向量与曲面法向量是有区别的，它们的微分的展开系数是不一样的。黎曼弯曲空间不需要更高维的平直空间为背景，因此切平面的概念在黎曼几何中是不合逻辑的。如果没有三维平直空间的背景，怎么引入二维曲面的切平面？怎么定义平面上的向量，怎么描述向量沿曲面上曲线的移动？因此等等，都是无法想象的问题。

因此黎曼几何又不得不模仿高斯几何，将二维流形嵌入三维欧氏空间。然而一般的黎曼三维流形又应当是弯曲的，否则就不能自圆其说。在高维弯曲空间中，如果没有更高维的平直空间背景，黎曼几何照样无法建立超切面的概念，二维曲面理论中出现的问题照样存在。这意味着我们根本不可能有真正的弯曲空间理论，黎曼几何的这种缺陷是致命的和无法挽救的。

六 . 讨 论

本文作者长期从事广义相对论研究，一直将黎曼几何作为工具使用。前些年看到上海交通大学物理系杨本洛教授对黎曼几何的批评文章，指出黎曼几何推导曲率张量的过程忽略了法向增量，得到的结果是无效的【2】。由于当时对黎曼几何过于信任，觉得不以为然，就没有去深究这个问题。

近来作者又看到美国田纳西大学物理天文系王令隽教授的一篇文章【5】。该文提出的疑问是，将描述引力场空间的黎曼曲率张量缩拼成标量后，可以得到曲率标量为零的结果。但我们凭什么认为，曲率标量为零空间仍然是弯曲的呢？最典型的例子是二维曲面的曲率张量，它只有一个独立分量，因此只能视为标量。如果这个曲率标量等于为零，我们还能认为这个二维曲面真的是曲面吗？王令隽觉得这种结果是不正常的，并认为曲率标量为零的空间只能是平直的。

之后通过网络检索，我们又发现国内许多学者如李子、周宪和杨世家等都著文，认为黎曼几何是错误的。由此引起我们对黎曼曲率张量的有效性产生怀疑，就开始研究这个问题。

通过大量的计算，我们找到一批黎曼曲率张量失效的二维曲面。它们都是真正的曲面，通过坐标变换无法将它们变成平直空间的度规。但用黎曼曲率张量计算，在某些区域或全部区域都有 $R_{1212}=0$。由于高斯曲率和黎曼曲率被认为是一致的，结果意味着高斯曲率公式对这些曲面也失效。

进一步的研究发现，这些曲面在高斯理论中都是不合法曲面。原因在于高斯理论中二维曲面定义在三维欧氏空间中，描述曲面的三个空间坐标之间存在约束关系，即曲面方程。如果改用两个曲面坐标来描述，高斯曲面第一基本关系式中的三个函数只有两个是独立的。而对高斯理论不合法的曲面是任意构造的，其中的三个函数是独立的。我们不可能找到坐标变换，将这些曲面变换到三维平直空间的度规。因此高斯曲率公式失效的原因不在曲率公式本身，而在于曲面不合法。这个结果也说明，高斯理论中二维曲面与三维平直背景空间密切相关，实际上不具有内蕴特征。

问题是黎曼几何不存在平直空间背景，只要满足连续可微的条件，任意构造的曲面都是合法的。如果用黎曼曲率张量计算曲率为零，就只能说明黎曼曲率公式失效，而不是曲面本身的问题。

高斯微分几何建立在欧式几何的基础上，由于有物质实体空间背景的支撑，其概念是清楚的，逻辑是合理的。但高斯引入的内蕴几何概念，认为曲面理论可以脱离三维背景平直空间独立存在的观点则是错误的。作为高斯的继承人，黎曼没有继承高斯理论直观朴素的优点，却将高斯内蕴几何的错误延续和放大。按这种方式建立的高维弯曲空间理论，从一开始就是错的。

事实上，黎曼几何不可能独立于高斯几何而存在。如果没有高斯几何，仅凭黎曼几何公式，我们甚至连最简单的球面度规的形式都没有办法确定，更不用说其他更复杂的弯曲空间的度规了。脱离平直空间实体背景，黎曼几何将变成无源之水，无根之木。

黎曼几何理论高度抽象，表面上看它将欧氏几何与非欧几何统一起来，被看成是更高级的空间理论。然而本文分析表明，黎曼几何的基础漏洞百出，逻辑无法自洽，根本不可能与高斯几何是不可能达到一致的。最基本的一个问题是，黎曼弯曲空间几何必须采用局部活动标架参考系，高斯曲面理论以平直空间为背景，实际上采用三维平直空间的固定参考系。由于活动标架参考系中的微分量必然引入联络概念，黎曼几何与高斯几何的度规是根本不可能一样的。

除此之外，为了能与高斯几何一致，黎曼几何不得不引入许多不恰当的假设，结果仍然无法摆脱以欧式几何为背景的宿命。黎曼几何是依靠模仿高斯几何而生存，这种模仿恰恰背离了自己的弯曲空间可以独立存在本源，其理论在基本概念和直观图像上变得不伦不类。由于理论本底的错误，这种模仿带来的是更多的混乱和困惑。按目前流行的看法，黎曼几何被看出比高斯几何更一般的空间理论。但如果连最简单的一维曲线和二维曲面的曲率都不能正确描述，高维空间的黎曼几何还会

有什么实际意义呢？

因此本文的结论是，现有黎曼几何的基础存在严重的缺陷。作为其核心概念的度规张量和曲率张量的定义都是有问题的。度规张量可以采用本文的修正形式，但是会变得无比复杂。如果采用正确的度规，能否找到独立且合适的函数来描述空间曲率，仍然是一个大问题，我们需要考虑黎曼几何是否有必要存在。高维空间的几何理论只能按高斯微分几何的模式拓展。事实上在许多特殊问题中，数学家已经这样做了。但这种做法的其前提是，N 维弯曲空间必须有更高维的欧式空间为背景。

黎曼几何与高斯几何的关系有点像爱因斯坦引力理论与牛顿引力理论的关系，如果没有牛顿理论为背景，爱因斯坦引力场方程的解连积分常数都没有办法确定。爱因斯坦引力理论建立在弯曲时空概念基础上，爱因斯坦引力场方程用李奇张量来描述，而李奇张量是通过将黎曼曲率张量缩并来构造的。如果黎曼几何的曲率张量不能正确描写空间曲率，就意味着爱因斯坦引力场方程不成立。包括超弦、超膜和超对称理论在内的一大批与弯曲空间有关的现代物理学理论都成问题，对现代物理学的影响是巨大的。

参考文献

1. 孙志铭，物理中的张量，北京师范大学出版社，1985 年，p. 100，134，139，180.
2. 杨本洛，两类“相对论”形式逻辑分析，上海交通大学出版社，2011 年，p. 149，185.
3. 梅向明，黄敬之，微分几何（第四版），高等教育出版社，2008 年，p. 71，84，132， 140，161.
4. 余扬政，冯承天，物理学中的几何方法，高等教育出版社，1998，p.186.
5. Wang Ling Jun，On the Flatness of Space, www. Academia.edu.