黎曼几何的基础存在严重的缺陷（3）

—— 黎曼几何中张量的微分和变换规则存在的问题——

梅晓春[①]　　俞平[②]

（1）福州原创物理研究所　　（2）美国 Cognitech 计算技术研究所

内容摘要 本文指出，黎曼几何中定义的张量变换规则缺乏普遍性。只有对某些有不变性规则保证的过程，这种变换规则才是可能的，比如弧长不变使度规张量具有这种变换性质。对于没有不变性规则保证的过程，其内含的张量不可能按这种方式变换。文中严格按照数学运算规则，给出采用活动标架参考系后一般张量的变换规则。结果与黎曼几何是不同的，由此证明黎曼几何的张量变换规则一般不成立。

关键词　微分几何，黎曼几何，张量变换，协变张量

一．黎曼几何中张量变换定义存在的问题

1.1 张量的定义和变换

张量的概念在数学和物理学中有广泛的应用，物理学规律一般被认为是用张量来描述的。黎曼几何中，张量的变换有明确的定义。零阶张量是标量，其形式在坐标变换 $x^\mu \to x'^\mu$ 下不变，或者说一个标量在坐标变换下仍然是一个标量。一阶张量是向量，它有协变和逆变之分。设坐标变换为 $x^\mu = x^\mu(x'^\nu)$，坐标微分的变换就是：

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu \tag{1}$$

如果一个向量 $A^\mu(x^\nu)$ 也按照（1）式的方式变换， 则称其为逆变向量，其变换和逆变换规则为：

$$A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A'^\nu \qquad\qquad A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \tag{2}$$

另外，假设存在一个标量 $\varphi(x^\nu)$， $A_\mu = \partial\varphi / \partial x^\mu$，其变换与逆变换为：

$$A_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A'_\nu \qquad\qquad A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu \tag{3}$$

如果某个向量按（3）式的方式变换，则称之为协变向量。（3）式与（2）式的变换规则在曲线坐标系中是不一样的，在正交坐标系中则是一样的。由以上两种变换规则，就可以定义更高阶的逆变张量，协变张量和混合张量。比如二阶协变张量的变换和逆变换是：

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} A'_{\rho\sigma} \qquad\qquad A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} A_{\rho\sigma} \tag{4}$$

为简单起见，本文仅讨论协变张量，其结果同样适用于逆变张量和混合张量。

1.2 协变张量定义的合理性问题

一般认为，如果一个数学物理量用张量来描述，就意味着在坐标变换下它的形式是不变的。事实上在爱因斯坦的狭义和广义相对论中，由于相对性原理的需要，物理学的运动方程必须用张量方程来描述。然而这里出现一个问题，比如有一个客观存在的物理量，它可以用向量来表示，但未必就一定满足（2）式的变换。以下我们举两个例子，证明向量的协变性是有条件的。

首先，狭义相对论四维时空坐标向量 $x^{\mu}(x,y,z,ict)$ 满足（2）式的变换，即所谓的洛伦兹变换：

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-V^2}} \qquad y=y' \qquad z=z' \qquad t=\frac{t'+Vx'}{\sqrt{1-V^2}} \tag{5}$$

式中 V 是两个参考系的相对运动速度，变换系数 $\partial x^{\mu}/\partial x'^{\nu}=\alpha_{\mu\nu}=$ 常数。然而洛伦兹变换是有条件的，其前提是存在光速不变原理，即 $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$，或 $x^{\mu}x^{\mu}=x'^{\mu}x'^{\mu}=0=$ 常数。另外，狭义相对论的四维能量动量 $P_{\mu}(p_x,p_y,p_z,iE/c)$ 也满足（3）和（5）式的变换关系，我们同样有 $P_{\mu}P_{\mu}=P'_{\mu}P'_{\mu}=-m_0^2c^2=$ 常数。

然而对于一般的四维向量，（3）式未必能满足。比如狭义相对论中的四维力 f_{μ} 定义为：

$$f_x(\bar{x},t)=\frac{F_x(\bar{x},t)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad f_y(\bar{x},t)=\frac{F_y(\bar{x},t)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$f_z(\bar{x},t)=\frac{F_z(\bar{x},t)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad f_0(\bar{x},t)=\frac{\bar{u}\cdot\bar{F}(\bar{x},t)}{c\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{6}$$

式中 $F_i(\bar{x},t)$ 是粒子在三维空间中受到的力，u 是粒子的运动速度。如果四维力也满足（3）式，就有：

$$f_x=\frac{f'_x+Vf'_0/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \qquad f_y=f'_y \qquad f_z=f'_z \qquad f_0=\frac{f'_0+Vf'_x/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{7}$$

其中的 $f'_i=f'_i(\bar{x}',t,V)$ 是将 $f_i(\bar{x},t)$ 中在时空坐标 $(\bar{x},t)$ 进行洛伦兹变换的结果，因此 f'_i 一般包含相对一定速度。按照（7）式，同样可以得到 $f_{\mu}f_{\mu}=f'_{\mu}f'_{\mu}$。但由于 $f_{\mu}f_{\mu}$ 不含相对运动速度 V，$f'_{\mu}f'_{\mu}$ 含 V，而 V 是任意的，因此 $f_{\mu}f_{\mu}=f'_{\mu}f'_{\mu}$ 一般是不可能的，除非 $f_{\mu}(x)f_{\mu}(x)=$ 常数。事实上狭义相对论中从来没有证明四维力的平方是一个相对论不变量。除了四维力外，经典电磁理论中的另外一个例子是四维电磁势 $A_{\mu}(x)$，我们实际上不可能保证 $A_{\mu}(x)A_{\mu}(x)=$ 常数。

关于这个问题，更详细的讨论见文献【3】。因此（3）式成立是有条件的，即存在某种规则，保证四维向量的平方是不变量。如果不存在这种不变量，（3）式的协变向量变换规则是不成立的。关于这个问题，更详细的讨论见文献【3】。

事实上，在三维空间中，要使向量的每个分量都满足（3）式，就必须令 $\bar{A}(x)=\nabla\varphi(x)$，或：

$$\bar{A}(x)=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^1}\bar{i}+\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^2}\bar{j}+\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^3}\bar{k}=A_i(x)\bar{i}+A_j(x)\bar{j}+A_k(x)\bar{k} \tag{8}$$

然而这一般是不可能的。例如对于电磁场 $\bar{E}(\bar{x},t)$ 和 $\bar{B}(\bar{x},t)$，有 $\bar{E}(\bar{x},t)\neq\nabla\varphi(\bar{x},t)$，$\bar{B}(\bar{x},t)\neq\nabla\varphi(\bar{x},t)$。只有在某些特殊的条件下，比如于静电场，我们有 $\bar{E}(\bar{x})=\nabla\varphi(\bar{x})$。但对于静磁场，我们也找不到一个 $\varphi(x)$ 可以使 $\bar{B}(\bar{x})=\nabla\varphi(\bar{x})$，因此电磁场不是协变向量。

另外一个例子是，在高斯曲面论中，二维曲面上的某点可以用三维空间中的向量 $\bar{r}(u,v)$ 表示。在该点建立切平面，切平面上的任意向量表示为 $\bar{R}=\bar{r}_{\mu}+\bar{r}_{v}$，其中 $\bar{r}_{\mu}=\partial\bar{r}/\partial u$，$\bar{r}_{v}=\partial\bar{r}/\partial v$。但 $\bar{r}(u,v)$

是向量不是标量，与（3）式也是不一致的。因此对于一般的向量，（3）式不可能满足，坐标变换（1）式没有普遍性。

对于二阶张量，情况也一样，比如对弧长的平方：

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{9}$$

如果弧长是一个不变量，变换到另外一个参考系，可得：

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}}dx'^{\sigma}dx'^{\rho} = g'_{\sigma\rho}(x')dx'^{\sigma}dx'^{\rho} = ds'^2 \tag{10}$$

就有：

$$g'_{\sigma\rho}(x') = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}}g_{\mu\nu}(x) \qquad \text{或} \qquad g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\nu}}g'_{\sigma\upsilon}(x') \tag{11}$$

因此度规张量满足（4）式定义的协变性规则。然而对于一般的张量，（4）式的变换也是不可能的。比如对于电磁场张量，我们有：

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

可知电磁场张量分量 $T_{\nu\nu}$ 实际上就是 E_i 和 B_i，然而如上文所述，它们是不可能按（4）式的方式进行变换的。因此一般而言，坐标变换下张量的变换规则必须根据实际情况，按照基本数学规则来计算。如果不是这样，试图人为定义它的变换规则，就可能出现严重的错误。

以上讨论的是张量在欧式空间中的变换。本文主要讨论黎曼弯曲空间中张量的变换，其中涉及活动标架参考系的变换，形式更为复杂，以下详细讨论。

二．活动标架参考系中向量的微分及其变换

2.1 黎曼几何中向量的协变微分及其变换

考虑 **N** 维黎曼弯曲空间，在空间某点建立局部坐标系，可以将局部参考系中的向量写为：

$$\vec{A}(x) = A_{\mu}(x)\vec{e}_{\mu}(x) \tag{13}$$

黎曼几何中，向量的分量 $A_{\mu}(x)$ 通常意义上的导数被认为是：

$$A_{\mu,\ \nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \tag{14}$$

然而将（3）式两边做通常意义上的微分，得：

$$A_{\mu,\ k} = A'_{\nu,\ \alpha}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} + A'_{\nu}\frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}\partial x^{k}} \tag{15}$$

黎曼几何中证明存在以下关系【2】：

$$\frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}\partial x^{k}}=\Gamma^{\alpha}_{\mu\ k}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}-\Gamma'^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{k}} \tag{16}$$

其中 $\Gamma^{l}_{\mu k}$ 是第二类克里斯托弗符号，计算公式是：

$$\Gamma^{l}_{\mu k}=\vec{e}^{\,l}\cdot\frac{\partial\vec{e}_{\mu}}{\partial x^{k}}=\frac{1}{2}g^{\beta\ l}\left(\frac{\partial g_{k\beta}}{\partial x_{\mu}}+\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_{k}}-\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x_{\beta}}\right) \tag{17}$$

两个坐标系中，克里斯托弗符号的变换规则为【3】:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\ k}=\Gamma'^{\nu}_{\sigma\beta}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{k}}+\frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}\partial x^{k}}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \tag{18}$$

将（16）式代入（15）式，得：

$$A_{\mu,\ k}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\ k}A_{\alpha}=(A'_{\nu,\ \alpha}-\Gamma'^{\beta}_{\alpha\nu}A'_{\beta})\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{k}} \tag{19}$$

令：

$$A_{\mu;\ k}=A_{\mu,\ k}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\ k}A_{\alpha}\qquad\qquad A'_{\nu;\ \alpha}=A'_{\nu,\ \alpha}-\Gamma'^{\beta}_{\alpha\nu}A'_{\beta} \tag{20}$$

上式就是黎曼几何中协变微分的定义，它比正常的微分计算多了包含克里斯托弗符号的一项，这实际上是采用活动标架导致的结果。将（20）式代入（19）式，得到向量协变微分的变换方式，它与（3）式定义的变换是一致的：

$$A_{\mu;\ k}=A'_{\nu;\ \alpha}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{k}} \tag{21}$$

2.2 用向量二阶协变微分推导曲率张量

黎曼几何中，有两种方法推导曲率张量。一是先定义向量的 Levi-Civita 平移，然后通过向量平移导出曲率张量。而是通过绝对微分算符的不对易性，也就是向量的二阶协变微分的不对易性，导出黎曼曲率张量。第一中方法前文以及详细讨论，以下详细讨论第二种方法。

按照协变微分的规则，将（21）式再做一次协变微分，得：

$$A_{\mu;\ kl}=(A_{\mu;\ k}),_{l}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\ l}A_{\alpha;\ k}-\Gamma^{\alpha}_{k\ l}A_{\mu;\ \alpha} \tag{22}$$

将指标 k 和 l 互换，利用 $\Gamma^{\alpha}_{\mu\ l}=\Gamma^{\alpha}_{l\ \mu}$，得：

$$\begin{aligned}A_{\mu;\ kl}-A_{\mu;\ lk}=&(A_{\mu,\ k}-\Gamma^{\alpha}_{\mu k}A_{\alpha}),_{l}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\ l}(A_{\alpha,\ k}-\Gamma^{\beta}_{\alpha k}A_{\beta})\\ &-(A_{\mu,\ l}-\Gamma^{\alpha}_{\mu l}A_{\alpha}),_{k}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\ k}(A_{\alpha,\ l}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\ l}A_{\beta})\end{aligned} \tag{23}$$

式中包含向量分量 A_{μ} 偏导数的项相互抵消，最后可得：

$$A_{\mu;\ kl}-A_{\mu;\ lk}=R^{\alpha}_{\mu kl}A_{\alpha} \tag{24}$$

式中 $R^{\alpha}_{\mu kl}$ 就是黎曼曲率张量：

$$R^{\alpha}_{\mu\ k\ l}=\Gamma^{\alpha}_{\mu\ l},_{k}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\ k},_{l}+\Gamma^{\beta}_{\mu\ l}\Gamma^{\alpha}_{\beta\ k}-\Gamma^{\beta}_{\mu\ k}\Gamma^{\alpha}_{\beta\ l} \tag{25}$$

显然，（24）式是 A_{μ} 关于坐标 x^{k} 和 x^{l} 的协变导数不对易的结果，其中 $R^{\alpha}_{\mu kl}$ 的几何意义是不明确的。也就是说仅仅按照（24）式，我们不能确认 $R^{\alpha}_{\mu kl}$ 描述空间曲率。

2.3 正确的向量微分及其变换

以上讨论建立在（3）式定义的基础上，然而如前文指出，协变向量的定义没有普遍的意义。对于一般的向量，其微分计算应当重新考虑。为此，先讨论高斯几何中向量的微分规则。高斯几何建立在欧式空间中，曲面上空间点的向量写成：

$$\vec{A} = A_i(x,y,z)\vec{i} + A_j(x,y,z)\vec{j} + A_k(x,y,z)\vec{k} \tag{26}$$

其中基向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 是不变量。向量的微分则是：

$$d\vec{A} = \frac{\partial A_i(x,y,z)}{\partial x}dx\vec{i} + \frac{\partial A_j(x,y,z)}{\partial y}dy\vec{j} + \frac{\partial A_k(x,y,z)}{\partial z}dz\vec{k} \tag{27}$$

如果采用活动标架参考系中，基向量是变量。将（13）式微分，得到：

$$d\vec{A}(x) = (dA_\mu)\vec{e}_\mu + A_\mu d\vec{e}_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu \vec{e}_\mu + A_\mu d\vec{e}_\mu \tag{28}$$

标架基向量的微分公式为【4】：

$$d\vec{e}_\mu(x) = \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^k}dx^k = \Gamma^l_{\mu k}\vec{e}_l dx^k \tag{29}$$

将（29）式代入（28）式，得：

$$d\vec{A}(x) = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\vec{e}_\mu dx^\nu + A_\mu \Gamma^l_{\mu k}\vec{e}_l dx^k = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\vec{e}_\mu dx^\nu + A_\mu \Gamma^l_{\mu\nu}\vec{e}_l dx^\nu$$

$$= \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\vec{e}_\mu dx^\nu + A_l \Gamma^\mu_{l\nu}\vec{e}_\mu dx^\nu = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{l\nu}A_l\right)dx^\nu \vec{e}_\mu \tag{30}$$

与（14）式比较，采用活动标架后，我们实际上应当将向量分量的偏导数写为：

$$(A_\mu)_{,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{l\nu}A_l \tag{31}$$

（31）和（20）式相差一个负号，等号右边第二项求和指标的位置也不一样（$\Gamma^\mu_{l\nu}$ 不是逆变张量，指标 μ 的上下位置可以随便）。（31）式是在活动标架参考系中，严格按照数学规则的计算结果。而（19）式是黎曼几何中的结果，它建立在（1）式的基础上。由于（3）式的定义不是普遍成立的，因此（20）和（21）式是没有普遍意义的。在活动标架参考系中，向量的微分应当用（31）式表示。

利用（18）式，（30）式中微分分量的变换规则应当是：

$$(A_\mu)_{,\nu}dx^\nu = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{l\nu}A_l\right)\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha}dx'^\alpha\right)$$

$$= \left[(A'_\mu)_{,\alpha} + A'_l\left(\Gamma'^\lambda_{\sigma\beta}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^l}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^l \partial x^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\right)\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha}\right]dx'^\alpha \tag{32}$$

考虑到 $\partial x'^\alpha / \partial x'^\beta = \delta_{\alpha\beta}$，以及：

$$\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^l \partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^l \partial x'^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\alpha}\right) = \frac{\partial \delta_{\lambda\alpha}}{\partial x^l} = 0 \tag{33}$$

得：
$$(A_\mu)_{,\nu}dx^\nu = \left((A'_\mu)_{,\alpha} + \Gamma'^{\lambda}_{\sigma\alpha}A'_l \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^l}\right)dx'^\alpha \qquad (34)$$

式中考虑到$\partial x'^\alpha / \partial x'^\beta = \delta_{\alpha\beta}$，显然上式与（21）式的变换规则也是不一样的。由于包含求和过程，偏微分量$(A_\mu)_{,\nu}$与dx^ν不能分离，就有：

$$(A_\mu)_{,\nu} \neq \left((A'_\mu)_{,\alpha} + \Gamma'^{\lambda}_{\sigma\alpha}A'_l \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^l}\right)\frac{dx'^\alpha}{dx^\nu} \qquad (35)$$

然而按照向量分量协变微分的变换式（21），偏微分量$(A_\mu)_{,\nu}$与dx^ν是分离的，因此黎曼几何的向量分量微分变换规则实际上是违反基本数学运算规则的。

三．活动标架参考系中二阶张量的微分及其变换

3.1 一般二阶张量的微分和变换

现有黎曼几何中，二阶张量分量的协变微分是：

$$T_{\mu\nu;\alpha} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^l_{\mu\alpha}T_{l\nu} - \Gamma^l_{\nu\alpha}T_{\mu l} \qquad (36)$$

它是建立在张量变换定义（4）式的基础上，不具有普遍的意义。我们需要重新讨论黎曼几何中张量的微分运算规则。数学上二阶张量可以看出两个一阶向量的并矢量，即可以令$\vec{\vec{T}} = \vec{A}\vec{B}$，就有：

$$d\vec{\vec{T}} = (d\vec{A})\vec{B} + \vec{A}(d\vec{B}) \qquad (37)$$

在活动标架局部参考系中，令$\vec{A} = A_\mu \vec{e}_\mu$，$\vec{B} = B_\nu \vec{e}_\nu$，代入上式并利用（28）式，得：

$$d\vec{\vec{T}} = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha}B_\nu + \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\alpha}A_\mu + \Gamma^\mu_{l\alpha}A_l B_\nu + \Gamma^\nu_{l\alpha}B_l A_\mu\right)dx^\alpha \vec{e}_\mu \vec{e}_\nu \qquad (38)$$

我们可以将张量的分量写成$T_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$，它对两个指标是对称的。可见采用活动标架参考系后，我们应当将张量分量的偏导数写成：

$$(T_{\mu\nu})_{,\alpha} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{l\alpha}T_{l\nu} + \Gamma^\nu_{l\alpha}T_{l\mu} \qquad (39)$$

与（36）式比较，（37）式也有一个负号的差别，等号右边第二、三项求和指标的位置也不一样。将上式变换到另外一个参考系，利用（18）和（33）式以及$\partial x'^\alpha / \partial x'^\beta = \delta_{\alpha\beta}$，得：

$$\begin{aligned}(T_{\mu\nu})_{,\alpha}\,dx^\alpha &= \left(\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{l\alpha}T_{l\nu} + \Gamma^\nu_{l\alpha}T_{l\mu}\right)\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}dx'^\beta\right) \\ &= \left[(T'_{\mu\nu})_{,\beta} + T'_{l\nu}\Gamma'^\rho_{\sigma\beta}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^l} + T'_{l\mu}\Gamma'^\rho_{\sigma\beta}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^l}\right]dx'^\beta\end{aligned} \qquad (40)$$

上式中偏微分量$(T_{\mu\nu})_{,\alpha}$与dx^α也不能分离，与黎曼几何的现有变换形式也是不一样的。

3.2 黎曼几何度规张量的变换

前文中已经证明，采用活动标架参考系，黎曼几何中弧长平方实际上应当写成：

$$ds^2 = (g_{\mu\nu} + 2x^k g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{k\nu} + x^k x^\alpha g_{pq}\Gamma^{p}_{k\nu}\Gamma^{q}_{\alpha\mu})dx^\mu dx^\nu = G_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{41}$$

因此黎曼几何的度规张量应当是$G_{\mu\nu}$而不是$g_{\mu\nu}$，但克里斯托弗符号仍然用$g_{\mu\nu}$计算。考虑到ds^2是不变量，度规张量的变换规律是（11）式。利用（31）式，得：

$$G_{\mu\nu}(x) = G'_{\sigma\rho}(x')\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} = \left(g'_{\sigma\rho} + 2x^k g_{\sigma\alpha}\Gamma^{\alpha}_{k\rho} + x^k x^\alpha g_{pq}\Gamma^{p}_{k\rho}\Gamma^{q}_{\alpha\sigma}\right)\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu}$$

$$= \left[g'_{\sigma\rho} + 2x'^k g'_{\sigma\alpha}\left(\Gamma'^{l}_{\lambda\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^l}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^k}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^l}{\partial x^k \partial x^\rho}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^l}\right) + x'^k x'^\alpha g'_{pq}\right.$$

$$\left.\times\left(\Gamma'^{l}_{\sigma\beta}\frac{\partial x'^p}{\partial x^l}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^k}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^l}{\partial x^k \partial x^\rho}\frac{\partial x'^p}{\partial x^l}\right)\left(\Gamma'^{l}_{k\beta}\frac{\partial x'^q}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x'^l}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma}\frac{\partial x'^q}{\partial x^l}\right)\right]\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \tag{42}$$

其形式是非常复杂的。它由两种变换组成，一是由于弧长平方的不变性导致的张量变换，用（4）式表示。二是张量本身内含的数学量在活动标架参考系中产生的变换，如果包含微分量，则用（31）表示。如果没有不变规律的保证，张量变换只能考虑第二种情况。只有这样，才能使张量的数学运算达到一致性。

四．讨 论

参考文献

1. 孙志铭，物理中的张量，北京师范大学出版社，1985 年，p. 100，134，139，180.
2. 杨本洛，两类“相对论”形式逻辑分析，上海交通大学出版社，2011 年，p. 149，185.
3. 梅向明，黄敬之，微分几何（第四版），高等教育出版社，2008 年，p. 71，84，132， 140，161.
4. 余扬政，冯承天，物理学中的几何方法，高等教育出版社，1998，p.186.
5. Wang Ling Jun，On the Flatness of Space, www. Academia.edu.