黎曼几何的基础存在严重的缺陷（2）

——用列维-齐维塔向量平移推导黎曼曲率张量存在的问题——

梅晓春[①]　　**俞平**[②]

（1）福州原创物理研究所　　**（2）美国 Cognitech 计算技术研究所**

内容摘要 黎曼几何多种方法推导曲率张量，一是通过绝对微分算符的不对易性关系，二是通过向量的列维-齐维塔（Levi-Civita）平移。本文指出黎曼几何导出曲率张量的过程存在以下几个问题。1. 黎曼弯曲空间中向量平移概念是可以任意定义的，列维-齐维塔平移的定义不具有唯一性。2. 在弯曲空间中，我们也可以将向量平移定义为：向量沿某闭合曲线移动时，与该曲线切线的角度保持不变。按这种平移定义，向量沿连续的闭合曲线一周回到原出发点时，与原来的向量是完全重合的，就无法得到所谓的曲率张量。3. 即使按照列维-齐维塔向量平移的定义，平移过程产生的某些差值由回路曲线的不连续性引起。如果向量沿连续闭合的短程线回路做平移，回到原出发点时就可能没有差值。3. 现有黎曼几何采用向量沿四条对称的不连续曲线回路的平移来计算黎曼曲率，如果采用三条或多条不对称曲线构成闭合回路，也得不到黎曼曲率张量的现有形式。4. 向量的列维-齐维塔平移忽略了向量在曲面法向的变化，得到曲率张量公式实际上是无效的。因此黎曼曲率张量实际上只是协变微分算符不对易性导致的结果，它的几何意义是不明确的，我们没有理由认为它描述空间曲率。文章还讨论了

关键词　微分几何，黎曼几何，曲率张量，列维-齐维塔平移，高斯曲率

一．前 言

本文第一部分证明，对于某些任意选择的曲面，黎曼曲率张量和高斯曲率公式失效，并分析黎曼曲率张量和高斯曲率公式失效的原因【1】。

文中列举许多例子，证明对于某些任意构造的，度规张量不可能变成常数的二维曲面（不可展曲面），却都能得到 $R_{1212}=0$ 的结果。因此黎曼曲率张量对这些曲面失效，我们不可能用 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ 是否等于零来判断空间是否弯曲。

文中证明，高斯微分几何与黎曼几何实际上是不一致的。比如在一般的情况下，高斯曲面曲率是有方向性的。在不同的方向上，曲面的曲率一般都是不一样的。然而在黎曼几何中，二维曲面的曲率张量只有一个独立分量 R_{1212}，其曲率是没有方向性的。这不但与高斯理论不一致，而且违背基本几何常识。

另外，由于黎曼几何采用活动标架，微分弧长涉及标架基向量的导数。黎曼度规张量应当与联络有关，实际上应当写为：

$$dS^2=(g_{\mathrm{ij}}+2x^k g_{il}\varGamma^l_{kj}+x^k x^l g_{pq}\varGamma^p_{kj}\varGamma^q_{li})\mathrm{d}x^i dx^j=G_{ij}\mathrm{d}x^i dx^j \quad (1)$$

由此会导致黎曼几何的重大改变。因此黎曼几何的基础存在严重的缺陷，黎曼几何实际上不成立。

本文继续讨论黎曼几何存在的问题。黎曼几何中，有两种方法推导曲率张量，一是通过向量沿闭合回路的列维-齐维塔平移，二是通过绝对微分算符的不对易性关系。然而如杨本洛在 2005 年指出，列维-齐维塔平移忽略了向量在曲面法向的变化，得到曲率张量公式实际上是无效的【2】。本文对此做了严格计算，证明忽略向量在曲面法向的变化等价于在高斯理论中令 $L = M = N = 0$。其结果意味着曲率为零，曲面实际上是平面。

更一般地讨论问题，应当假设初始向量不在切平面上。按照高斯方程和 Weingarten 方程，向量的列维-齐维塔平移公式就变成：

$$da^1 = (L_{1k} g^{kj} - \Gamma_{kj}^1 a^k) dx^j \qquad da^2 = (L_{2k} g^{kj} - \Gamma_{kj}^2 a^k) dx^j \qquad da^3 = -(L_{i1} + L_{i2}) dx^i \tag{2}$$

采用上式计算向量平移，我们不可能得到现有的黎曼张量公式。

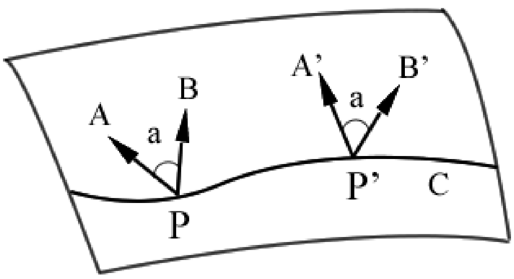
本文进一步指出，黎曼几何中所谓的向量平移产生的差值是由回路曲线的不连续性引起。如果向量沿连续的闭合曲线回路做平移，回到原出发点时就没有差值。考虑到空间曲率与向量平移回路的选择无关，用列维-齐维塔平移方法推导曲率张量是无效的。现有黎曼几何采用向量沿四条对称的不连续曲线回路的平移来计算黎曼曲率，而不是采用四条，而是采用三条或多条不对称曲线构成闭合回路，也得不到黎曼曲率张量的现有形式。

因此黎曼曲率张量实际上只是协变微分算符不对易性导致的结果，它的几何意义是不明确的，我们没有理由认为它描述空间曲率。

二．向量的列维-齐维塔平移与 Gauss-Bonnet 公式

2.1 向量列维-齐维塔平移的定义

黎曼几何中，曲率张量通过曲面上向量的列维-齐维塔平移导出。然而这种推导需要将曲面嵌入高维平直空间，使用的方法实际上仍然是高斯几何的。纯粹的黎曼几何推导方法是采用张量变换不变性，但用这种方法得到的曲率张量的几何图像是不明确的，因此本文中我们不讨论这种方法。



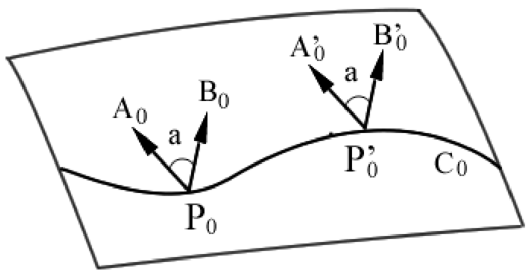


图 1. 向量在曲面上沿任意曲线的平移　　**图 2. 向量在任意曲面的包络面展成的平面上的平移**

列维-齐维塔平移涉及曲面上曲线切平面的包络面的展开【3】，在几何图像不太容易说清。设图 3 的曲面上有曲线 C，在其 P 点的切平面上有两个向量 A 和 B，二者的夹角为 a。将 A 和 B 做列维-齐维塔平移到 P' 点，忽略向量在曲面法线方向的变化，得到向量 A' 和 B'，二者的长度和夹角不变。但 A 和 A' 之间，以及 B 和 B' 之间的角度发生变化，因此这种平移不是通常理解的欧氏平面上的平移。

之所以说它们是平移，是从曲线 C 的切平面的包络面的展开来看的。如图 4 所示，将曲线 C 的

切平面的包络面展开成一个平面，得到 C_0 曲线。在这个平面上，图 3 中 P 点的向量 A 和 B 变成图 4 中 P_0 点的 A_0 和 B_0，图 3 中 P' 点的 A' 和 B' 变成图 4 中 P_0' 点的 A_0' 和 B_0'。此时 A_0 和 A_0' 之间，以及 B_0 和 B'_0 之间才是真正，欧氏平面意义上的平移。如果曲面上的曲线 C 是短程线，情况如图 5 所示。向量沿短程线做列维-齐维塔平移时，它与短程线切线的夹角始终保持不变。

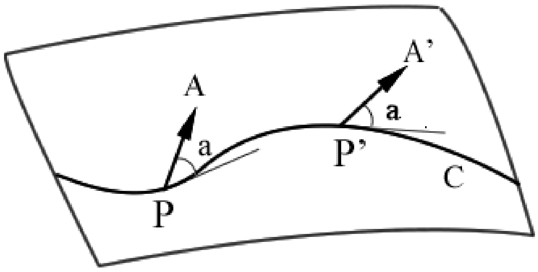


图 3. 向量在曲面上沿短程线的平移

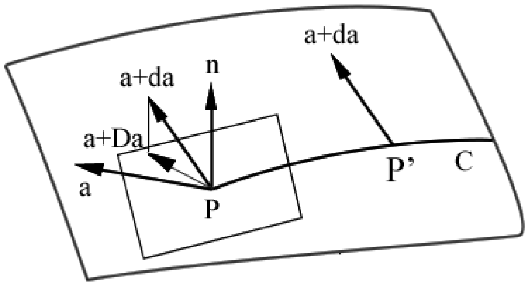


图 4. 向量平移的法向分量与绝对微分

2.2 列维-齐维塔平移与绝对微分

从数学定义上看，列维-齐维塔平移的概念是很清楚的，它就是向量的绝对微分等于零时的移动。如图 6 所示，曲面 C 上 P 点的切平面上有向量 $\vec{a}$，将它以任意方式移到邻域 P' 点，得到向量 $\vec{a}+d\vec{a}$。$\vec{a}+d\vec{a}$ 在曲面的法方向的分量是 $[\vec{n}\cdot(\vec{a}+d\vec{a})]\vec{n}$。由于 $\vec{a}$ 在曲面切平面上，即 $\vec{n}\cdot\vec{a}=0$，则有【3】:

$$[\vec{n}\cdot(\vec{a}+d\vec{a})]\vec{n}=(\vec{n}\cdot d\vec{a})\vec{n} \tag{3}$$

将 $\vec{a}+d\vec{a}$ 在切平面上的投影写为 $(\vec{a}+d\vec{a})_t$，就有:

$$(\vec{a}+d\vec{a})_t=\vec{a}+d\vec{a}-(\vec{n}\cdot d\vec{a})\vec{n} \tag{4}$$

由于 $(\vec{a})_t=\vec{a}$，从上式得 $(d\vec{a})_t=d\vec{a}-(\vec{n}\cdot d\vec{a})\vec{n}$。令 $(d\vec{a})_t=D\vec{a}$，并将 $D\vec{a}$ 称为向量 $\vec{a}$ 的绝对微分，即定义:

$$D\vec{a}=d\vec{a}-(\vec{n}\cdot d\vec{a})\vec{n} \tag{5}$$

也就是说向量的绝对微分等于其正常微分减去法向的增量后，得到的在切平面上的剩余部分。如果 $D\vec{a}=0$，得 $d\vec{a}=(\vec{n}\cdot d\vec{a})\vec{n}$。即向量 $\vec{a}$ 在切平面上的增量为零，或向量的微分沿法线方向时，就称向量是列维-齐维塔平移。

2. 3 弯曲空间中向量平移定义的任意性

平面上向量平移的定义式很直观的，平移前后向量保持平行，不发生转动。向量沿任何闭合曲面移动一周回到原来出发点时，与原来的向量完全重合。如图 5 所示，在这种情况下，向量与曲线的夹角是要发生变化的。如果平面上向量沿曲线移动时与曲线的夹角不变，这样的移动就不是平移。如图 6 所示，向量沿闭合曲面移动一周回到原来出发点时，仍然与原来的向量重合。但如果也按这种方式，将向量沿不连续的闭合曲线移动一周回到原来出发点，就与原来的向量不重合，情况实际上也可以用图 7 所示。在这种情况下，角度差由闭合曲线的不连续引起，实际上与空间弯曲无关。

在弯曲空间中如何定义向量的平移呢？这实际上是一个没有确定答案的问题，因为在弯曲空间中实际上根本不存在向量平移的问题。或者说这是可以任意定义的，你可以把遵循某种规则的移动定义为平移。黎曼几何把列维-齐维塔平移定义为向量平移，但它不具有唯一性。

事实上，在弯曲空间中，我们也可以将向量平移定义为：向量沿某闭合曲线移动时，与该曲线的切线的角度保持不变。按这种平移的定义，向量沿连续的闭合曲线一周回到原出发点时，与原来的向量是完全重合的。如果按这种方法定义向量在黎曼弯曲空间中的平移，就无法得到所谓的黎曼曲率张量。

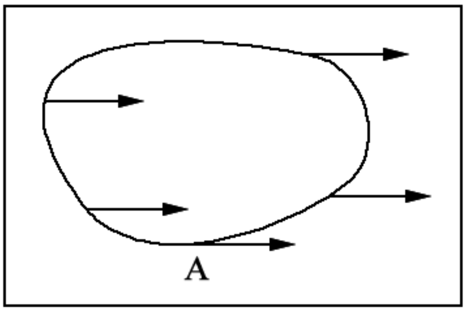


图 5. 向量在平面上沿闭合曲线的平移

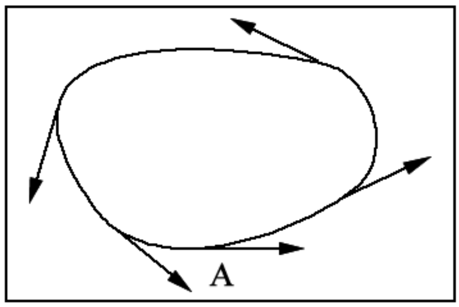


图 6. 向量在平面上沿不闭合曲线的移动

2.4 用 Gauss- Bonnet 公式计算向量平移存在的问题

高斯微分几何中有一个著名的 Gauss- Bonnet 公式，可以表述如下。假定 C 是曲面 S 上一条分段光滑的简单闭合曲线，它所包围的区域 D 是曲面上一个单连通的区域。则有【4】：

$$\int_C \kappa_g ds = \iint_D K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \qquad (6)$$

其中 κ_g 是曲线 C 的测地曲率， K 是曲面的高斯曲率， α_i 是曲线 C 在各个角点的外角， s 是弧长参数。目前一般认为 可以用它来计算向量沿曲面上闭合曲线平移后产生的转角。以下证明，Gauss-Bonnet 公式不具有普遍意义，用它计算向量沿曲面上闭合曲线平移后产生的转角实际上是不可能的。

首先，Gauss- Bonnet 公式是在正交坐标系中导出的。在推导过程中，令曲面函数 F 等零，曲面的第一基本形式为：

$$I = Edu^2 + Gdv^2 \qquad (7)$$

由此可以得到测地曲率的 Liouville 公式：

$$\kappa_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial v} \cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin\theta \qquad (8)$$

将上式积分，再利用正交坐标系中的高斯曲率公式：

$$K = \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{E})_u}{\sqrt{G}} \right)_u \qquad (9)$$

就可以得到（6 式）。然而对于 F 不等于零的非正交曲面，至今没有人证明 Gauss-Bonnet 公式仍然成立，因此（6）式没有普遍意义。

其次，Gauss- Bonnet 公式的角度差是对不连续曲线构成的闭合回路而言。如果是连续曲线构成的回路，就没有角点。（6）式右边第二项为零，剩下的三项都不能描述向量移动后的真正转角。事实上，如果向量沿连续的测地线平移，测地曲率为零，Gauss-Bonnet 公式就只剩两项，右边第一项的 2π 等于没有转动。

最重要的是，关于从 Gauss - Bonnet 公式计算转角的问题，现有教科书中有些计算也实际上是有问题的，因为其中引入了某些不正确的条件，现讨论如下【4】。设曲面的第一基本形式用（7）是表示，令 $(\bar{r};\bar{a}_1,\bar{a}_2)$ 代表曲面上单位正交切标架场。曲面上曲线的方程是 $u=u(s)$ 和 $v=v(s)$， $\bar{X}(s)$ 是沿曲线 C 平行的单位切向量场。可令：

$$\bar{X}(s)=\cos\varphi(s)\bar{a}_1(u(s),v(s))+\sin\varphi(s)\bar{a}_2(u(s),v(s)) \tag{10}$$

其中 $\varphi(s)$ 是 $\bar{X}(s)$ 与 $u-$ 曲线所成的方向角。由于 $\bar{X}(s)$ 是平行移动，绝对微分等于零，得：

$$0=\frac{D\bar{X}(s)}{ds}=\frac{d\varphi}{ds}\left(-\sin\varphi\ \bar{a}_1+\cos\varphi\ \bar{a}_2\right)+\cos\varphi\frac{D\bar{a}_1}{ds}+\sin\varphi\frac{D\bar{a}_2}{ds} \tag{11}$$

或：

$$\frac{d\varphi}{ds}=\left(\sin\varphi\ \bar{a}_1-\cos\varphi\ \bar{a}_2\right)\cdot\left(\cos\varphi\ \frac{D\bar{a}_1}{ds}+\sin\varphi\ \frac{D\bar{a}_2}{ds}\right)=-\frac{D\bar{a}_1}{ds}\cdot\bar{a}_2 \tag{12}$$

另一方面，用 $\bar{e}_1$ 表示曲线 C 的单位切向量， $\bar{e}_2=\bar{n}\times\bar{e}_1$ 则是将 $\bar{e}_1$ 按正向旋转 90^0 得到的单位切向量。用 θ 表示 $\bar{e}_1$ 与 $u-$ 曲线所成的方向角，就有：

$$\bar{e}_1=\cos\theta\ \bar{a}_1+\sin\theta\ \bar{a}_2 \qquad\qquad \bar{e}_2=-\sin\theta\ \bar{a}_1+\cos\theta\ \bar{a}_2 \tag{13}$$

按测地曲率的定义，考虑（13）式，得：

$$\kappa_g=\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\cdot\bar{e}_2=\frac{D\bar{e}_1}{ds}\cdot\bar{e}_2=\frac{d\theta}{ds}+\frac{D\bar{a}_1}{ds}\cdot\bar{a}_2 \tag{14}$$

将（14）式与（12）式比较，得：

$$\frac{d\theta}{ds}-\kappa_g=\frac{d\varphi}{ds} \tag{15}$$

将（15）式在曲线上积分，得：

$$\varphi(l)-\varphi(0)=\oint_C d\varphi=\oint_C d\theta-\oint_C \kappa_g ds=2\pi-\oint_C \kappa_g ds \tag{16}$$

其中 l 是曲线的弧长。再利用（6）式（连续曲线没有角点），得：

$$\varphi(l)-\varphi(0)=\iint K d\sigma \tag{17}$$

因此单位切向量 $\bar{X}(s)$ 绕简单曲线 C 平行移动一周回到原处时，转过的角度等于高斯曲率在曲线 C 所围的单连通区域的积分。

然而以上计算有一个问题。将（13）式的 $\bar{e}_1$ 与（10）式比较可知，二者的函数形式完全一样。因此与曲线 C 平行的单位切向量场和曲线 C 的单位切向量实际上是同一个概念，它们没有本质的区别，或者说二者相对于 $u-$ 曲线的夹角最多相差一个常数。然而对于单位切向量场，平行移动由（11）式表示，绝对微分等于零。但对于曲线 C 的单位切向量，为什么它的移动就不是平行移动，在（14）式中其绝对微分 $D\bar{e}_1/ds$ 为什么不等于零呢？

如果在（14）式中也令 $D\bar{e}_1/ds=0$，就有 $\kappa_g=0$，我们就得不到（17）式。因此用 Gauss - Bonnet 公式计算转角是不可能的。这其中还涉及向量场概念的引入问题。我们知道，高斯微分几何实际上不需要引入向量场概念。向量场概念是黎曼几何引入的，黎曼几何需要这个概念。以上讨论告诉我

们，向量场概念有可能导致不一致的结果，关于这个问题我们以后再详细讨论。

三．用列维-齐维塔向量平移推导黎曼曲率张量存在的问题

用向量的列维-齐维塔平移来导出黎曼曲率张量存在两个主要问题：

1. 忽略了向量平移时在曲面法方向上的变化，因此列维-齐维塔平移方法是无效的【2】。

2. 推导过程采用不连续的闭合曲线，这才是列维-齐维塔平移后向量方向改变的真正原因。如果向量沿闭合曲线移动，回到出发点后就不可能有方向改变，也就不可能导出曲率张量。

3.1 忽略向量平移在曲面法向的增量导致的问题

我们先来讨论第一个问题。杨本洛提出该问题，但没有做具体计算。以下我们通过具体计算来显示法向增量对列维-齐维塔平移的影响。设曲线的参数用弧长 s 表示，曲线某点的切平面上向量的坐标是 $a^1(s)$ 和 $a^2(s)$，向量 $\vec{a}$ 就可以写为：

$$\vec{a}=a^1\vec{r}_1+a^2\vec{r}_2 \tag{18}$$

式中 $\vec{r}_1=\vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_2=\vec{r}_v$ 是高斯理论定义的基向量。对（18）式微分，利用高斯方程：

$$\vec{r}_{ij}=\sum_{k=1}^{2}\Gamma'^k_{ij}\vec{r}_k+L_{ij}\vec{n} \tag{19}$$

得【3】:

$$\begin{aligned}d\vec{a}&=\vec{r}_1da^1+a^1d\vec{r}_1+\vec{r}_2da^2+a^2d\vec{r}_2\\&=\vec{r}_1da^1+\vec{r}_2da^2+a^1[(\Gamma^1_{11}\vec{r}_1+\Gamma^2_{11}\vec{r}_2)du^1+(\Gamma^1_{12}\vec{r}_1+\Gamma^2_{12}\vec{r}_2)du^2]\\&+a^2[(\Gamma^1_{21}\vec{r}_1+\Gamma^2_{21}\vec{r}_2)du^1+(\Gamma^1_{22}\vec{r}_1+\Gamma^2_{2}\vec{r}_2)du^2]+[(L_{11}+L_{12})du^1+(L_{21}+L_{22})du^2]\vec{n}\end{aligned} \tag{20}$$

根据定义，将法向增量 $(L_{11}+L_{12})du^1+(L_{21}+L_{22})du^2$ 忽略，就得到绝对微分 $D\vec{a}$。经过整理后得：

$$\begin{aligned}D\vec{a}&=(da^1+\Gamma^1_{11}a^1du^1+\Gamma^1_{12}a^1du^2+\Gamma^1_{21}a^2du^1+\Gamma^1_{22}a^2du^2)\vec{r}_1\\&+(da^2+\Gamma^2_{11}a^1du^1+\Gamma^2_{12}a^1du^2+\Gamma^2_{21}a^2du^1+\Gamma^2_{22}a^2du^2)\vec{r}_2\end{aligned} \tag{21}$$

如果是列维-齐维塔平移，则令 $D\vec{a}=0$。考虑到 $\vec{r}_1$ 和 $\vec{r}_2$ 相互独立，它们前面的系数等于零，就得到：

$$da^1=-\sum_{j,k=1}^{2}\Gamma^1_{jk}a^jdu^k \qquad\qquad da^2=-\sum_{j,k=1}^{2}\Gamma^2_{jk}a^jdu^k \tag{22}$$

（22）式就是向量列维-齐维塔平移的数学表示式，将它们用于曲线回路的计算，得到曲率张量 R_{1212}。然而这种计算存在以下 4 个问题：

1. 将法向增量略去，实际上是令 $(L_{11}+L_{12})du^1+(L_{21}+L_{22})du^2=0$。由于 du^1 和 du^2 独立，就有 $L_{11}+L_{12}=L+M=0$ 和 $L_{21}+L_{22}=N+M=0$。要使这两个式子普遍成立，唯有 $L=N=M=0$。按照高斯曲率公式，就有 $K=0$ 和 $R_{1212}=0$，曲面实际上是平面。

2. 严格按照 $D\vec{a}=0$ 和 $d\vec{a}=(\vec{n}\cdot d\vec{a})\vec{n}$，从（125）和 （127）式，我们实际上得到：

$$d\vec{a}=[(L_{11}+L_{12})du^1+(L_{21}+L_{22})du^2]\ \vec{n} \tag{23}$$

因此在计算黎曼曲率张量时，我们必须同时考虑（22）和（23）式。 如果考虑（23）式，我们就不可能得到曲率张量的现有形式。

3. 以上讨论假设初始时向量在曲面切平面上，但这个假设是没有必要的，因为曲面的曲率与初始向量的选取无关。如果初始向量不在平面内，就应当将（20）式改写为：

$$\vec{a} = a^1\vec{r}_1 + a^2\vec{r}_2 + a^3\vec{n} \tag{24}$$

对上式微分，利用高斯方程和 Weingarten 方程，得：

$$d\vec{a} = \vec{r}_1 da^1 + a^1 d\vec{r}_1 + \vec{r}_2 da^2 + a^2 d\vec{r}_2 + \vec{n} da^3 + a^3 d\vec{n}$$

$$= \vec{r}_1 da^1 + \vec{r}_2 da^2 + \vec{n} da^3 + a^1[(\Gamma_{11}^1\vec{r}_1 + \Gamma_{11}^2\vec{r}_2)du^1 + (\Gamma_{12}^1\vec{r}_1 + \Gamma_{12}^2\vec{r}_2)du^2]$$

$$+ a^2[(\Gamma_{21}^1\vec{r}_1 + \Gamma_{21}^2\vec{r}_2)du^1 + (\Gamma_{22}^1\vec{r}_1 + \Gamma_2^2\vec{r}_2)du^2]$$

$$- a^3[(L_{11}g^{11} + L_{12}g^{21})\vec{r}_1 + (L_{11}g^{12} + L_{12}g^{22})\vec{r}_2]du^1$$

$$- a^3[(L_{21}g^{11} + L_{22}g^{21})\vec{r}_1 + (L_{21}g^{12} + L_{12}g^{22})\vec{r}_2]du^2$$

$$+ a^2[(\Gamma_{21}^1\vec{r}_1 + \Gamma_{21}^2\vec{r}_2)du^1 + (\Gamma_{22}^1\vec{r}_1 + \Gamma_2^2\vec{r}_2)du^2] + [(L_{11} + L_{12})du^1 + (L_{21} + L_{22})du^2]\vec{n} \tag{25}$$

按照绝对微分的定义，忽略最后一行的法向增量后，得到：

$$D\vec{a} = [da^1 + \Gamma_{11}^1 a^1 du^1 + \Gamma_{12}^1 a^1 du^2 + \Gamma_{21}^1 a^2 du^1 + \Gamma_{22}^1 a^2 du^2]\vec{r}_1$$

$$- a^3[(L_{11}g^{11} + L_{12}g^{21})du^1 + (L_{21}g^{11} + L_{22}g^{21})du^2]\vec{r}_1$$

$$+ [da^2 + \Gamma_{11}^2 a^1 du^1 + \Gamma_{12}^2 a^1 du^2 + \Gamma_{21}^2 a^2 du^1 + \Gamma_{22}^2 a^2 du^2]\vec{r}_2$$

$$- a^3[(L_{11}g^{12} + L_{12}g^{22})du^1 + (L_{21}g^{12} + L_{12}g^{22})du^2]\vec{r}_2 \tag{26}$$

令 $D\vec{a} = 0$，得到：

$$da^1 = \sum_{k,j=1}^{2}(L_{1k}g^{kj} - \Gamma_{kj}^1 a^k)du^j \qquad da^2 = \sum_{k,j=1}^{2}(L_{2k}g^{kj} - \Gamma_{kj}^2 a^k)du^j \tag{27}$$

将上式作为列维-齐维塔平移公式，多出含 L_{jk} 的项，我们就得不到现有的黎曼曲率张量公式。事实上如果 $D\vec{a} = 0$，从（26）式还可得：

$$d\vec{a} = [da^3 + (L_{11} + L_{12})du^1 + (L_{21} + L_{22})du^2]\vec{n} \tag{28}$$

（28）式与（23）式等价。考虑（28）式，我们就不可能得到曲率张量的现有形式。如果不考虑（28）式，就意味着必须同时令 $d\vec{a} = 0$，则有：

$$da^3 = -(L_{11} + L_{12})du^1 - (L_{21} + L_{22})du^2 \tag{29}$$

（29）式与（27）式是并列关系，表示法向分量的增量。同时考虑（27）和（29）式，我们更不可能得到现有的黎曼曲率张量公式。由此可见，如果不将平移后的法向增量去掉，黎曼几何就不可能得到 R_{1212}。但这种做法不符合数学逻辑，是在人为拼凑结果。

4. 用这种方法得到的实际上只是二维曲面的 R_{1212}，并不是高维空间的 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$。然而我们知道，将低维空间的结果类推到高维空间是危险的。比如一维曲线的曲率公式与二维曲面的曲率公式是不一样的，我们没有理由认为高维的 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ 与二维的 R_{1212} 有相同的形式。因此即使通过列维-齐维塔平移能得到 R_{1212}，也不具有普遍意义。

3.2 平移回路不连续导致的问题

再来讨论第二个问题。黎曼几何推导黎曼曲率张量时，将曲面上某点切面上一个向量绕闭合曲线平行移动一周。如果回到出发点时与原来的向量不重合，就说空间是弯曲的。通过二者的差值，得到曲率张量的具体形式。略去法向的增量后，将逆变向量平移公式（22）改写为：

$$\delta A^i = A'^i - A^i = -\Gamma^i_{jk} A^j dx^k \tag{30}$$

同样可以得到协变向量的平移公式：

$$\delta A_i = A'_i - A_i = \Gamma^j_{ik} A_j dx^k \tag{31}$$

具体做法如图 7 所示，初始时向量 $A^i(P)$ 位于 P 点，沿曲线 $\overline{PR}$ 平移到 R 点，再沿曲线 $\overline{RS}$ 平移到 S 点，得到向量 $A^i(SR)$。然后将向量沿另外一个方向的曲线 $\overline{PQ}$ 和 $\overline{QS}$ 移到相同的 S 点，得到向量 $A^i(SQ)$。用（30）式计算 $A^i(SR)$ 和 $A^i(SQ)$ 的差值 $\delta A^i(S)$，就可以得到黎曼曲率张量。

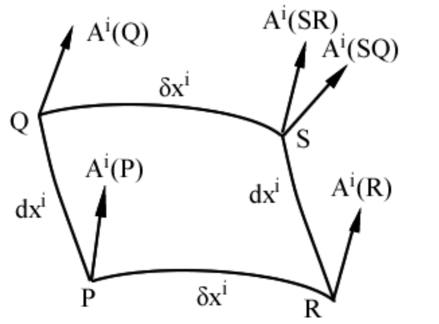


图 7. 向量沿四条不连续曲线的平移

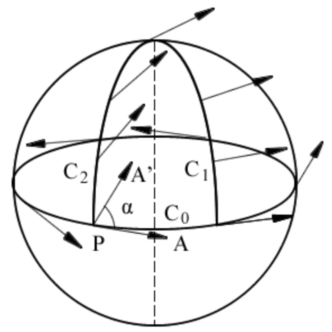


图 8. 向量沿球面上短程线的平移

在这种推导过程中，以下三点需要强调：

（1） 由于曲面曲率与向量移动的路径无关，曲线 $\overline{PR}$，$\overline{RS}$，$\overline{PQ}$ 和 $\overline{QS}$ 可以任意选择。向量平移是图 3 意义上的平移，向量与曲线的夹角不是固定的。只是为了方便，有时把它们画成与曲线的夹角不变。

（2）四条曲线 $\overline{PR}$，$\overline{RS}$，$\overline{PQ}$ 和 $\overline{QS}$ 构成闭合回路是不连续的。

（3）由于曲率是曲面的内秉特性，用向量的列维-齐维塔平移推导曲率张量，必须与选取的曲线回路无关。或者说任意选取曲线回路，得到的结果都应当一样。

由此就产生以下三个问题：

（1）我们可以选择连续的短程线来构成回路，在这种情况下向量绕回路平移后是没有角度差的。如图 8 所示，C_0、C_1 和 C_2 是由球面大圆曲线的片段，它们都是短程线，由它们构成的回路闭合但不连续。P 点的向量 A 绕 C_0、C_1 和 C_2 构成的回路后变成 A'，产生角度差 α，球面曲率不为零。然而如果向量绕球面赤道（连续的短程线）一周回到 P 点，就没有角度差，就意味着球面曲率为零，由此就产生矛盾，如果列维-齐维塔平移规则有效的话。由于球面的曲率是常数，它与选取的回路面

积无关，也不存在取极限的问题。结果只能说明角度差是由回路的不连续引起，用列维-齐维塔平移规则计算球面的曲率是无效的。

（2）由于绝对微分将法向的增量忽略，我们只要考虑与法线垂直的平面上的向量平移。如图 9 所示，我们可以用平面π在曲面上切割出一条包含P点的连续曲线C。在这种情况下，C即包含在曲面上，也包含在平面π上。如果C在曲面上，按照列维-齐维塔平移规则，向量A绕曲线平移回到出发点后存在角度差。然而我们也可以认为曲线C在π平面上，向量在平面上沿曲线C平移。按照平面上向量的平移规则，回到出发点后就没有角度差，由此也产生矛盾。

（3）图 7 导出黎曼曲率张量过程选取四条不连续曲线回路。由于曲面曲率与闭合回路的选择无关，原则上也可以采用三、五和六条曲线构成的回路。以下我们来证明，如果采用不同条数的曲线构成回路，就会得到不同形式的曲率张量，因此用这种方法得到的曲率张量是没有意义的。

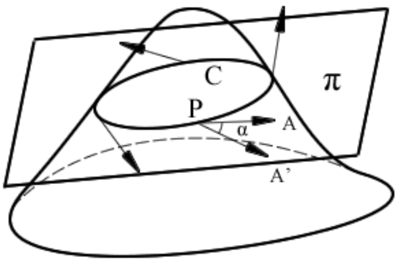


图 9. 曲线位于曲面上时向量的平移

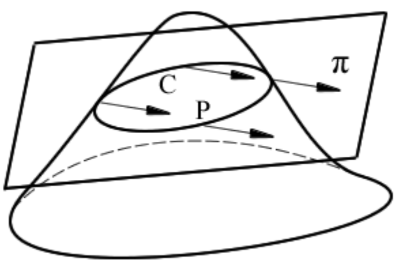


图 10. 曲线位于平面上时向量的平移

3.3 向量沿 3 条闭合曲线构成的回路时的曲率张量

我们先引述黎曼几何导出曲率张量的过程。设向量A^i从图 7 中的P点出发，经过R点到达S点。按照列维-齐维塔规则，平移到Q点和S点上时，向量分别表示为【5】:

$$A^i(Q) = A^i(P) - \Gamma^i_{jk}(P)A^j(P)dx^k \tag{32}$$

$$A^i(SQ) = A^i(Q) - \Gamma^i_{lh}(Q)A^l(Q)\delta x^h \tag{33}$$

黎曼几何中联络的变换规则为：

$$\Gamma^i_{lh}(Q) = \Gamma^i_{lh}(P) + \Gamma^i_{lh}(P)_{,m}dx^m \tag{34}$$

将（33）和（34）式代入（32）式，得到：

$$A^i(SQ) = A^i(P) - \Gamma^i_{jk}(P)A^j(P)dx^k$$

$$-[\Gamma^i_{lh}(P) + \Gamma^i_{lh}(P)_{,m}dx^m][A^l(P) - \Gamma^l_{jk}(P)A^j(P)dx^k]\delta x^h \tag{35}$$

向量A^i沿路径$P \to Q \to S$的增量为：

$$\delta A^i(PQS) = A^i(SQ) - A^i(P)$$

$$= -\Gamma^i_{lh}A^j dx^k - \Gamma^i_{lh}A^l\delta x^h - \Gamma^l_{jk,m}A^l dx^m\delta x^h + \Gamma^i_{lh}\Gamma^l_{jk}A^j dx^k\delta x^h + O[(dx^k)]^3 \tag{36}$$

同样可得A^i沿路径$P \to R \to S$的增量：

$$\delta A^i(PRS) = A^i(RQ) - A^i(P)$$

$$= -\Gamma^i_{jh} A^j \delta x^k - \Gamma^i_{lh} A^l dx^h - \Gamma^i_{lh},_m A^l \delta x^m dx^h + \Gamma^i_{lh} \Gamma^l_{jk} A^j \delta x^k dx^h + O[(\delta x^k)^3] \tag{37}$$

由于 $\delta A^i(SRP) = -\delta A^i(PRS)$，向量沿 $P \to Q \to S \to R \to P$ 平移一周的增量是：

$$\delta A^i = A^i(PQS) + A^i(SRP) = -R^i_{hkj} A^j dx^k \delta x^h \tag{38}$$

由此得到黎曼曲率张量：

$$R^i_{hkj} = \Gamma^i_{jh},_k - \Gamma^i_{jk},_h + \Gamma^i_{lk}\Gamma^l_{jh} - \Gamma^i_{lh}\Gamma^l_{jk} \tag{39}$$

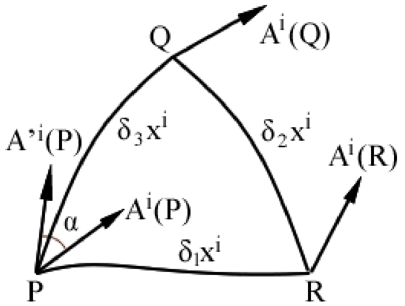


图 11. 向量沿三条不连续曲线闭合回路的平移

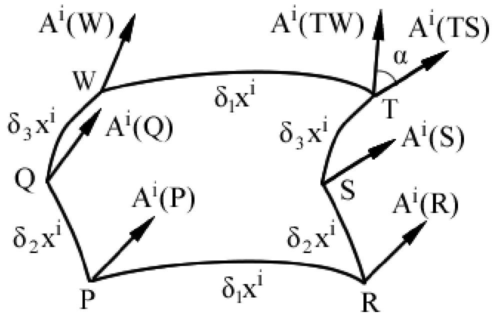


图 12. 向量沿五条不连续曲线闭合回路的平移

如果向量不是沿四条对称的曲线移动，而是沿三条曲线移动，结果就完全不一样。设向量从图 11 的 P 点出发，达到 R 点再经过 Q 点回到原出发点。按照列维-齐维塔规则，平移到 R 点和 Q 点上时，向量可以表示为：

$$A^i(R) = A^i(P) - \Gamma^i_{jk}(P) A^j(P) \delta_1 x^k \tag{40}$$

$$A^i(Q) = A^i(R) - \Gamma^i_{lh}(R) A^l(R) \delta_2 x^h \tag{41}$$

黎曼几何中联络的变换规则为：

$$\Gamma^i_{lh}(R) = \Gamma^i_{lh}(P) + \Gamma^i_{lh}(P),_m \delta_1 x^m \tag{42}$$

将（40）和（42）式代入（41）式，得：

$$A^i(Q) = A^i(P) - \Gamma^i_{jk}(P) A^j(P) \delta_1 x^k + \Gamma^i_{lh}(P) A^l(P) \delta_2 x^h$$

$$+ \Gamma^i_{lk}(P) \Gamma^l_{jh}(P) A^j(P) \delta_1 x^h \delta_2 x^k - \Gamma^i_{lh}(R),_m A^l(P) \delta_1 x^h \delta_1 x^m + O(dx^k)^3 \tag{43}$$

另一方面，如果向量直接从 P 点平移到 Q 点，结果是：

$$A'^i(Q) = A^i(P) - \Gamma^i_{lh}(P) A^l(P) \delta_3 x^h \tag{44}$$

因此向量平移经过 R 点和 Q 点回到原出发点的差值是:

$$\delta A^i(P) = A^i(Q) + [-A'^i(Q)] = \Gamma^i_{lh} A^l \delta_3 x^h - \Gamma^i_{lh} A^l \delta_2 x^h$$

$$-\Gamma^i_{lh} \Gamma^l_{jk} A^j \delta_1 x^h \delta_2 x^k + \Gamma^i_{lh},_m A^l \delta_1 x^h \delta_2 x^m + (\delta x^k)^3 \tag{45}$$

如果取 $\delta_2 x^h = \delta_3 x^h$，略去高阶项，就有：

$$\delta A^i = -(\Gamma^i_{lh}\Gamma^l_{jk} - \Gamma^i_{jk},_h)A^j\delta_1 x^k\delta_2 x^h = -R^i_{hkj}A^j\delta_1 x^h\delta_2 x^k \quad (46)$$

曲率张量就变成：

$$R^i_{hkj} = \Gamma^i_{lh}\Gamma^l_{jk} - \Gamma^i_{jh},_k \quad (47)$$

它与目前黎曼几何中的曲率张量（39）式不一样，只剩一半。同样，如果向量沿图 12 中的 6 条对称但不闭合的回路平移，得到的曲率张量也不可能是目前的形式。而且还会涉及三个联络的乘积 $\Gamma^i_{jh}\Gamma^j_{kl}\Gamma^k_{pq}$，得到的是 6 阶曲率张量，而不是 4 阶张量，形式会复杂得多。

由于曲率是空间的内秉性质，与向量平移的回路选择无关，因此用列维−齐维塔平移规则来求曲率张量的做法实际上是不可行的。事实上，许多黎曼几何教科书和文献都从张量变换的不变性出发来推导曲率张量，以避免采用列维-齐维塔平移中出现的问题。然而应当指出的是，黎曼几何中定义的张量变换规则也是有问题的。也就是说，用张量变换的不变性来推导黎曼几何的曲率张量也是有问题的，对此作者将另文讨论。

3. 4 黎曼曲率张量的本质

那么黎曼几何中的曲率张量 $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ 和 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ 到底代表什么呢？它们实际上是绝对微分算符的不对易性导致的结果。黎曼几何中已经证明，绝对微分算符分量的对易关系为【6】：

$$(D_k D_j - D_j D_k)A^i = -R^i_{kjh}A^h \quad (48)$$

如前所述，所谓的绝对微分，其实就是标架发生变化的情况下对向量（或张量）的微分。如果坐标系固定，绝对微分实际上就变成普通的微分。因此（48）式仅是算符的一种数学关系，它的几何意义是不清楚的。其中的 R^i_{kjh} 与空间曲率没有直接的联系，就像量子力学算符的不对易性与实际物理现象无直接关联一样。

如果绝对微分等于零，就意味着向量在黎曼空间移动是保持不变。为了能够描述二维空间的弯曲，不得不把二维曲面放到三维平直空间中，同时引入列维-齐维塔平移概念，将平移定义为 $D\bar{A}=0$。然而在三维空间中向量的平移和微分运算都会产生法向增量，于是就不得不重新定义绝对微分，在 $D\bar{A}$ 中忽略法向的增量。这样做的结果是，绝对微分不再是向量真正的微分。由于空间曲率与向量在法向的变化密切相关，忽略法向的增量，$D\bar{A}$ 实际上就变得与空间曲率无关。

因此黎曼几何中这种推导曲率张量的做法不伦不类，牵强附会，因人设局，毫无意义。结论只能是，黎曼几何中的曲率张量 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ 不能正确描述空间曲率。

参考文献

1. 梅晓春，俞平，黎曼几何的基础存在严重的缺陷（1）。
2. 杨本洛，两类“相对论”形式逻辑分析，上海交通大学出版社，2011 年，p. 149，185.
3. 梅向明，黄敬之，微分几何（第四版），高等教育出版社，2008 年，p. 71，84，132，140，161.
4. 陈维恒，微分几何初步，北京大学出版社，1990，p.189，191，195.
5. 孙志铭，物理中的张量，北京师范大学出版社，1985 年，p.180.
6. 余扬政，冯承天，物理学中的几何方法，高等教育出版社，1998，p.186.