广义相对论的引力波辐射公式是错误的

—— 陈永明平直时空中的类电引力波辐射理论简介——

梅晓春

福州原创物理研究所

内容摘要 本文指出广义相对论的引力波辐射公式的推导有错。该公式通过爱因斯坦引力场方程和坐标条件，将能量动量张量T_{ik}用四极矩来表示。得到的引力波辐射功率与$\ddot{\rho}\, x_i x_k$成正比，与坐标对时间的导数无关。然而为了得到与实用的辐射公式，广义相对论却将该公式变换到随动坐标系，使辐射公式与空间坐标的导数$\ddot{x}_i'$有关，物质分布密度却变成与时间无关的常数。这显然违背数学变换的基本原则，因此广义相对论的引力波辐射公式是偷换概念得到的，不代表广义相对论的真正结果。考虑牛顿引力公式与库伦静电公式的相似性，广义相对论是用类似于经典电磁理论的方法，得到引力四极矩辐射的公式。如果在实验上观察到引力波，不是广义相对论预言的，建立在弯曲时空基础上的引力波。本文介绍了陈永明的类电引力波辐射理论，陈永明用该理论详细计算了脉冲双星PSR1913+16 的引力波辐射。得到的结果是，双星辐射引力波导致每个周期双星之间的距离减少 3.12 毫米。而泰勒和赫尔斯的实际观察是，每周期双星之间的距离减少 3.0951 毫米，二者的差别小于 1%。因此我们完全可以用平直时空引力理论来描述引力辐射，不需要爱因斯坦弯曲时空引力理论。

关键词: 广义相对论，引力场方程，引力波辐射，能量动量张量，磁极辐射，电四极辐射

1. 广义相对论的引力波辐射公式

经典电磁理论中，电磁波辐射的最低阶是偶极辐射，广义相对论的引力波最低阶是四极辐射。偶极辐射比四极辐射大的多，加上引力相互作用必电磁相互作用小得多，因此引力波的探测是非常困难的。本文证明，现有广义相对论的引力波辐射公式存在严重的问题。通过实验寻找引力波时，需要先把引力波辐射的理论搞清楚。否则我们有可能把引力可能存在的偶极辐射当成四极辐射，或者只采用四极辐射方法探测引力波，忽略了引力实际存在的偶极辐射。

首先简述广义相对论引力波辐射公式的导出过程。在弱场近似条件下，广义相对论将引力场的度规张量写成【1】:

$$g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1}$$

其中$G_{\mu\nu}$是闵可夫斯基平直时空度规，$h_{\mu\nu}$和它的各阶导数为一阶无穷小量。令$h = h_{\mu\mu}$以及:

$$\chi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}h \tag{2}$$

爱因斯坦引力场方程则改写为【1】:

$$\partial^2 \chi_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu} \tag{3}$$

其中常数$\kappa = 8\pi G/c^4$，$T_{\mu\nu}$是系统的能量动量张量。希尔伯特证明，在满足调和坐标:

$$\frac{\partial \chi_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}}=0 \tag{4}$$

的条件下$(\chi_{\mu}^{\nu}=\chi_{\mu\alpha}g_{\alpha}^{\nu})$，（3）式的解为：

$$\chi_{\mu}^{\nu}=\frac{\kappa}{2\pi}\int\frac{T_{\mu}^{\nu}(r',t-r/c)}{r}dV \tag{5}$$

上式就是弱场条件下引力波辐射的推迟解。当$T_{\mu\nu}$分布在有限的区域，且观察点离场源很远时，可以将上式写成：

$$\chi_{\mu}^{\nu}=\frac{\kappa}{2\pi\, r_0}\int T_{\mu}^{\nu *}dV \tag{6}$$

式中星号$*$代表推迟量，r_0是观察者与坐标原点的距离。上式的理论计算和实际观察条件是，观察者静止坐标系中，远离源物质。源物质位于坐标系的原点附近，处于运动状态。系统的能量动量张量包含物质的运动速度和加速度，产生的引力场用（6）式描述。

根据场方程（3）式和坐标条件（4）式，可得$T_{\mu,\nu}^{\nu}=0$，具体写出来就是：

$$T_{k,i}^{i}+T_{k,0}^{0}=0 \tag{7}$$

$$T_{0,i}^{i}+T_{0,0}^{0}=0 \tag{8}$$

将（7）式乘上空间坐标x^j，并对空间积分。考虑到引力场方程（包含能量动量张量）中时空坐标是独立的，即x^j与x^0无关，或$\partial x^j/\partial x^0=0$，得到【1】：

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int T_k^0 x^j dV=-\int T_{k,i}^{i}dV=\int\left[T_k^i\delta_i^j-\frac{\partial(T_k^i x^j)}{\partial x^i}\right]dV$$

$$=\int T_k^j dV-\int\frac{\partial(T_k^i x^j)}{\partial x^i}dV \tag{9}$$

应用高斯定理和无穷边界条件，上式等号右边第二项为零。将上指标下降，考虑到对称性，得：

$$\int T_{kj}dV=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\int(T_{0k}x_j+T_{0j}x_k)dV \tag{10}$$

将（8）式乘上$x^k x^j$，考虑到空间坐标x^k,x^j与时间坐标x^0无关，即$\partial(x^k x^j)/\partial x^0=0$，用同样的方法得到与（9）式类似的结果：

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int T_{00}x_k x_j dV=-\int(T_{0k}x_j+T_{0j}x_k)dV \tag{11}$$

从（10）和(11)式得到：

$$\int T_{kj}dV=\frac{1}{2}\frac{\partial}{(\partial x^0)^2}\int T_{00}x_k x_j dV \tag{12}$$

将$T_{00}=\rho(x_k,x_0)c^2$和$x_0=ct$代入上式，就得到：

$$\int T_{kj}dV=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t^2}\int\rho(x_k,t)x_kx_jdV=\frac{1}{2}\int\ddot{\rho}(x_k,t)x_kx_jdV \tag{13}$$

上式的物理意义是，通过引力场运动方程（3）式和坐标条件（4）式，将系统的能量动量张量T_{kj}对空间的积分用能量密度$\rho(x_k,t)$对时间的二阶时间导数$\ddot{\rho}(x_k,t)$来表示。由于张量T_{kj}有 6 个独立的分量，涉及物质的速度和加速度，在一般的物理过程中我们难以了解其细节。用（13）式表示后，我们只要知道其中一个分量T_{00}对时间的关系，求得（13）式，大大简化了讨论问题的难度。

在此基础上，广义相对论引入四极矩：

$$Q_{kj}=\int\rho(x_k,x_0)x_kx_jdV \tag{14}$$

并定义四极矩张量：

$$D_{kj}=3Q_{kj}-\delta_{kj}Q_{ii} \tag{15}$$

将（6）式改写为：

$$\chi_{\mu\nu}=\frac{2G}{4\pi\ r_0^*}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\rho(x_k,t)x_kx_jdV=\frac{2G}{4\pi\ r_0^*}\int\ddot{\rho}(x_k,t)x_kx_jdV=\frac{2G\ddot{Q}_{kj}}{4\pi\ r_0^*} \tag{16}$$

引力场的能量动量张量采用 Landau-Lifshitz 表述【1】，引力波沿x^3方向在立体角内的辐射强度则为：

$$dI=\frac{2G}{4\pi\ c^5}(\dddot{Q}_{11}^2+\dddot{Q}_{12}^2)d\Omega=\frac{G}{36\pi\ c^5}\left[\left(\frac{\dddot{D}_{11}-\dddot{D}_{22}}{2}\right)^2+\dddot{D}_{12}^2\right]d\Omega \tag{17}$$

对空间方向统计平均后得到能量的辐射功率：

$$-\frac{dE}{dt}=4\pi\frac{d\bar{I}}{d\Omega}=\frac{G\dddot{D}_{ij}^2}{45c^5}=\frac{G}{45c^5}\left(\dddot{Q}_{ij}^2-\frac{1}{3}\dddot{Q}_{kk}^2\right) \tag{18}$$

2. 广义相对论引力波辐射公式存在的问题

注意到按照（13）式，（14）式中四极矩关于时间的二次和三次偏导数只对能量密度而言，即：

$$\ddot{Q}_{kj}=\int\ddot{\rho}(x_k,t)x_kx_jdV \qquad\qquad \dddot{Q}_{kj}=\int\dddot{\rho}(x_k,t)x_kx_jdV \tag{19}$$

因此（17）和（18）式中的四极矩张量关于时间的二次和三次偏导数也只对能量密度而言，辐射功率与空间坐标对时间的导数无关。然而在做具体计算时，广义相对论却不是这样理解。而是将上式写为：

$$\ddot{Q}_{kj}=\int\rho_0\ddot{x}_k\ddot{x}_jdV \qquad\qquad \dddot{Q}_{kj}=\int\rho_0(x_k,t)\dddot{x}_k\dddot{x}_jdV \tag{20}$$

物质密度变成常数，辐射功率变得与空间坐标对时间的导数有关。这个结果是偷换概念，完全违背了原始的定义，导致严重的不一致性。以下我们来讨论这个问题。

为此，广义相对论引入坐标变换【1】：

$$x_1=x_1'\cos\omega\,t-x_2'\sin\omega\,t \qquad\qquad x_2=x_1'\sin\omega\,t+x_2'\cos\omega\,t \tag{21}$$

$$x_3 = x_3' \qquad\qquad t = t' \tag{22}$$

式中 (x_k', t') 被称为随动坐标系的坐标。以上变换实际上是牛顿力学的伽利略变换，在此变换下雅克比行列式等于 1，体积元不变。设物质密度是常数令 $\rho = \rho_0$，在变换下不变。采用主轴坐标系，在随动坐标中，将转动惯量写为：

$$I_{ij} = \int \rho_0 x_k' x_j' dV' \tag{23}$$

设转动轴为惯性椭球的一个主轴 x_3'，另外两个主轴为 x_1' 和 x_2'，可以将（14）式改写为【1】:

$$Q_{11}(t) = \int \rho_0 x_1 x_1 dV = \int \rho_0 (x_1' \cos\omega t - x_2' \sin\omega t)^2 dV'$$

$$= \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22}) + \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22})\cos 2\omega t \tag{24}$$

同样可得：

$$Q_{22}(t) = \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22}) - \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22})\cos 2\omega t \tag{25}$$

$$Q_{12}(t) = \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22})\sin 2\omega t \tag{26}$$

$$Q_{13}(t) = Q_{23}(t) = 0 \qquad\qquad Q_{33}(t) = I_{33}(t) \tag{27}$$

计算结果是：

$$\dddot{Q}_{11}^2 = 16(I_{11} - I_{22})^2 \omega^6 \sin^2 2\omega t \tag{28}$$

$$\dddot{Q}_{22}^2 = 16(I_{11} - I_{22})^2 \omega^6 \sin^2 2\omega t \tag{29}$$

$$\dddot{Q}_{12}^2 = 16(I_{11} - I_{22})^2 \omega^6 \cos^2 2\omega t \tag{30}$$

$$(\dddot{Q}_{kk})^2 = (\dddot{Q}_{11} + \dddot{Q}_{22} + \dddot{Q}_{33})^2 = 0 \tag{31}$$

$$(\dddot{Q}_{kj})^2 = (\dddot{Q}_{11}^2 + \dddot{Q}_{22}^2 + 2\dddot{Q}_{12}^2)^2 = 32\omega^6 (I_{11} - I_{22})^2 \tag{32}$$

代入（18）式，最后得到辐射功率公式为：

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32G\omega^6}{5c^5}(I_{11} - I_{22})^2 = \frac{32G}{45c^5}\omega^6 I^2 e^2 \tag{33}$$

式中 $I = I_{11} + I_{22}$ 是绕 x_3 轴在随动坐标中的转动惯量，$e = (I_{11} - I_{22})/I$ 是转动体的赤道椭率。由此产生以下几个问题：

1. 从（19）式变成（28）~（32）式是一个偷换概念的过程。（19）式中时间的求导只对能量（质量）密度，不对时空坐标。（28）~（32）式中，能量（质量）密度被看成是一个常数，时间的求导变成对空间坐标，这是违背数学变换的基本运算规则的。

2. 如果非要变换到随动坐标系，正确的变换应当如下。假设在静止的参考系中能量密度是 $\rho(x_k, t)$，坐标变换则有 $\rho(x_k, t) \to \rho'(x_k', t')$。按（20）~（22）式，有：

$$Q_{11}'(t') = \int \rho'(x_k', t')(x_1' \cos\omega t' - x_2' \sin\omega t')^2 dV'$$

$$Q'_{22}(t') = \int \rho'(x'_k, t')(x'_1 \sin\omega\, t' + x'_2 \cos\omega\, t')^2 dV'$$

$$Q'_{12}(t') = Q'_{21}(t') = \int \rho'(x'_k, t')(x'_1 \cos\omega\, t' - x'_2 \sin\omega\, t')(x'_1 \sin\omega\, t' + x'_2 \cos\omega\, t')^2 dV' \qquad （34）$$

令 $\dddot{\rho}(x_k, t) \to \dddot{\rho}'(x'_k, t')$，以及：

$$\dddot{R}_{kj}(t') = \int \dddot{\rho}'(x'_k, t') x'_k x'_j dV' \qquad （35）$$

例如，在静止参考系中：

$$\rho(x_k, t) = \frac{a}{(x_1^2 + x_2^2)} + \frac{bx_1^2}{t^2} \qquad \dddot{\rho}(x, t) = \frac{-24bx_1^2}{t^5} \qquad （36）$$

按（20）~（22）式的变换，将 $\dddot{\rho}(x, t)$ 变换到随动坐标系，则有：

$$\dddot{\rho}'(x', t') = \frac{-24b(x'_1 \cos\omega\, t' - x'_2 \sin\omega\, t')^2}{t'^5} \qquad （37）$$

可见在随动参考系中，四极矩张量对时间的求导也仅涉及能量密度，不涉及对四极矩坐标。因此有：

$$\dddot{Q}_{11} = \dddot{R}_{11} \cos^2\omega\, t' + \dddot{R}_{22} \sin^2\omega\, t' - \frac{1}{2}(\dddot{R}_{12} + \dddot{R}_{21}) \sin 2\omega\, t' \qquad （38）$$

$$\dddot{Q}_{22} = \dddot{R}_{11} \sin^2\omega\, t' + \dddot{R}_{22} \cos^2\omega\, t' + \frac{1}{2}(\dddot{R}_{12} + \dddot{R}_{21}) \sin 2\omega\, t'' \qquad （39）$$

$$\dddot{Q}_{12} = \dddot{Q}_{12} = (\dddot{R}_{11} - \dddot{R}_{11}) \sin\omega\, t' \cos\omega\, t' + \dddot{R}_{12}(\cos^2\omega\, t' - \sin^2\omega\, t') \qquad （40）$$

$$(\dddot{Q}_{kk})^2 = (\dddot{Q}_{11} + \dddot{Q}_{22} + \dddot{Q}_{33})^2 = (\dddot{R}_{11} + \dddot{R}_{22})^2 = F_1(\dddot{R}_{11}, \dddot{R}_{22}) \qquad （41）$$

$$(\dddot{Q}_{kj})^2 = (\dddot{Q}_{11}^2 + \dddot{Q}_{22}^2 + 2\dddot{Q}_{12}^2)^2 = F_2(\dddot{R}_{11}, \dddot{R}_{22,} \dddot{R}_{12}, \sin\omega t', \cos\omega t') \qquad （42）$$

可见 F_2 是一个很复杂的函数，代入（18）式，得：

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5}\left(F_2 - \frac{1}{3}F_1\right) \qquad （43）$$

结果与（33）式是完全不一样的。因此（33）式实际上与广义相对论无关，不是爱因斯坦引力理论的比结果。即使它是正确的，也不能用来证明广义相对论的引力辐射理论是正确的。

3. 如果在静止参考系中 $\dddot{\rho}(x_k, t) = 0$，即 $\rho(x_k, t) = \rho(x_k)$，引力波辐射等于零。在随动参考系中按照（21）式，我们有 $\rho(x_k) \to \rho'(x'_k, t)$。一般而言有 $\dddot{\rho}'(x'_k, t) \neq \rho_0$，因此（28）~（33）式都是错误的。

4. 如前所述在静止参考系中，导出（18）式时已经考虑了源物质的运动。如果源物质密度对时间的三次导数不为零时，就可以产生引力波。观察者在静止参考系中就可以观察到引力波，完全没有必要变换到随动坐标系去描述和观察。广义相对论之所以要将（18）式变换到随动坐标系，是因为按照广义相对论的计算方法，我们根本得不到正确的引力波辐射公式。出于无奈才做这种变换，使引力波公式变得实际可用。

5. 参考系的变换（20）~（22）式有两种解释，一是观察者不动，物质系统转动。二是物质系

统不动，观察者运动。然而，(13) 和（18）式的导出过程实际上已经考虑了物质系统的转动，其中包含了转动，我们没有必要再令物质系统转动。

6. 因此（20）~（22）式只代表观察者的转动，不代表物质系统的转动。如果物质密度与时间无关，源物质静止，就不可能产生引力波。引入（20）~（22）式的坐标变换后，（30）式变成观察者在随动坐标系中观察到的引力波辐射强度。意味着引力波是由观察者的运动产生的，这在物理学上是荒唐的。

3. 对天体引力辐射的影响

现有广义相对论计算引力波辐射时，恰恰违背了以上原则，得到的结果是无效的。

I）对于绕中心做匀速圆周运动的质点（球体），按照广义相对论，令 $x_1' = r$， $x_2' = x_3' = 0$，有 $I = I_1 = Mr^2$， $\rho = \rho_0 =$ 常数，椭率 $e = 1$，得：

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32G}{45c^5}\omega^6 M^2 r^4 \neq 0 \qquad (44)$$

例如对于绕太阳运动的木星，质量 $M = 1.90 \times 10^{27} Kg$，轨道半径 $r = 7.78 \times 10^{11} m$，角速度 $\omega = 1.68 \times 10^{-8} / s$，代入上式计算结果是 $-dE/dt = 5.23 \times 10^3 J/s$。已知水星绕日运动的机械能是 $10^{35} J$，将全部能量辐射完需要10^{24}年，因此木星的引力辐射是微乎其微。

然而按照（18）式的原始含义，在静止参考系中，这种运动无法用物质的场分布的方式来描述。（3）和（5）式只适用于物质场的连续分布，不适用于单个粒子的运动。不管（44）式正确与否，我们无法认为它是广义相对论的结果。

II）双星互绕的圆周运动，圆周半径为 R。与单个质点做圆周运动一样，我们无法用（18）式代表引力辐射强度。然而按照现有广义相对论的理解，则是令：

$$\omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{R^3} \qquad I = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} R^2 \qquad e = 1 \qquad (45)$$

代入（33）式得：

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32G^4 M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{5c^5 R^5} \qquad (46)$$

对于椭圆运动，辐射的频率不是单一的，辐射公式则应改为：

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32G^4 M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{5c^5 R^5} f(e) \qquad (47)$$

其中 $f(e)$ 是与偏心率有关的函数，R 是椭圆轨道长半轴的长度。

1978 年美国天文学家泰勒和赫尔斯宣布对射电双脉冲星 PSR1913+16 历时四年的观测结果，指出该脉冲双星的周期发生的变化与引力波辐射损失的能量相符，意味着间接观测到引力波【2】。但观察与理论预言的误差是 20%，而且依赖于 PSR1913+16 双星轨道参数的选取。之后的进一步研究认为理论计算与观察是一致的，误差不超过 0.4%【3】【4】。这个结果得到科学界的认可，被认为证实了广义相对论的引力波辐射理论。2003 年发现的双脉冲星 PSRJ0737-3039A/B，也被认为符合广义相对论的辐射公式【5】,【6】。

显然（47）式也不是广义相对论的结果，因为它不能还原成广义相对论的（18）式。如果对脉冲双星 PSR1913+16 和 PSRJ0737- 3039A/B 的观察是正确的，并不能证明广义相对论是对的。（33）

式实际上是广义相对论模拟经典电磁辐射理论的结果，但由于理论基础不一样，这种引力辐射公式实际上是不伦不类的。

4. 平直时空中的引力波辐射理论

我们知道牛顿引力公式与经典电磁理论的静电力公式在形式上完全一样。设真空中两个静止质量为 m_1 和 m_2 的物体带电量分别为 q_1 和 q_2，它们之间的静电力和万有引力分别为：

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2 \vec{r}}{r^3} \qquad\qquad F_g = \frac{G m_1 m_2 \vec{r}}{r^3} \tag{48}$$

只要令 $1/4\pi\varepsilon_0 \to G$， $q_1 \to m_1$ 和 $q_2 \to m_2$，就有 $F_e \to F_g$。

考虑到爱因斯坦弯曲时空引力理论存在的诸多基本问题，目前已经有许多人通过对牛顿引力理论的改造，提出平直时空的引力理论。这种引力理论认为，当物体有运动速度时，也存在与磁力对应的类磁引力。设引力传播速度为 c_g，引力类电介质常数为 ε_g，类磁导率为 μ_g，也有 $1/\sqrt{\varepsilon_g \mu_g} = c_g$。由此建立起与经典电磁场理论对应的引力场理论，同样能够解释广义相对论所有实验检验，但没有爱因斯坦弯曲时空引力理论存在的各种奇奇怪怪的问题。

以下简单介绍陈永明的引力波辐射理论【7】。陈永明于 2008 年在《中国基础科学》第一期上发表题为“质电类比当量和引力波”的文章。他在电磁辐射理论的基础上，得到的引力辐射公式。采用这个公式，陈永明详细计算了脉冲双星 PSR1913+16 的引力波辐射，得到与实际观察非常一致的结果。

文章中陈永明引入质电类比当量 $\lambda = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 G}$，令 $q_1 = \lambda m_1$， $q_2 = \lambda m_2$。认为双星系统的类电偶极矩为零，类磁偶极矩等于常数，系统做类电四极矩辐射，导出的类电四极矩张量为：

$$\vec{\vec{D}}(t) = \frac{1}{2}\left(q_1 + \frac{m_2^2}{m_1^2} q_2\right) r^2 \left[(1 + 3\cos 2\varphi)\vec{e}_x \vec{e}_x + (1 - 3\cos 2\varphi)\vec{e}_y \vec{e}_y - 2\vec{e}_z \vec{e}_z) \right] \tag{49}$$

也就是说与经典电磁理论一样，可以在静止参考系中就可以直接定义类电四极矩张量，然后考虑类电四极矩张量对时间的求导，得到引力波的辐射公式。经过繁复的计算，陈永明的结果是：

$$\Delta W = \frac{\mu_0}{4}\left[q_1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} q_2 \right]^2 \frac{7.0857\, h^5}{(0.8835\, r_0)^6} = 5.429 \times 10^{28} J \tag{50}$$

对于脉冲双星 PSR1913+16，式中 $m_1 = 1.387 M_0$， $m_2 = 1.441 M_0$， $M_0 = 1.989 \times 10^{30} Kg$ 是太阳质量，近日点 $r_1 = 7.4460 \times 10^8 m$，远日点 $r_2 = 3.1536 \times 10^9 m$。 $r_0 = 6.9630 \times 10^8 m$，周期 $T = 2.7907 \times 10^4 s$，偏心率 $e = 0.617131$ ，其中 $h = 3.6077 \times 10^{-4} r_0^2 m^2 .rad/s$。由此得出双星运动一周，周期时间的减少 $\Delta T = 7.65 \times 10^8 s$，两星体间距离减小 $\Delta r = 3.12 mm$。泰勒和赫尔斯经过 18 年的观察，得到的结果是，双星运动一周距离减小 $\Delta r = 3.0951 mm$。陈永明的计算与泰勒和赫尔斯的观察差别小于 1%，可以认为是相当符合的。因此，引力波辐射完全可以用平直时空中的引力理论来解释，无需爱因斯坦弯曲时空引力理论。

参考文献：

1. 刘辽，赵峥，广义相对论，高等教育出版社，2004，p.88, 133, 140.

2. Hulse R. A., Taylor., Astrophys. J. 1975, L. 51, 195.
3. Weiberg J. M., Taylor J. H., Observations of post-Newtonian timing effect in the binary pulsar PSR 1913+16, Phys Rev Lett, 1984, 52;1348.
4. 李宗伟，脉冲双星 PSR1913+16，大学物理，1994，13 卷，3 期，p.1.
5. LYNE A. A Double-Pulsar System: A Rare Laboratory for Relativistic Gravity and Plasma, Physics [J]. Science, 2004,5561(303:1 153.
6. CAMPANELLI M, Accurate Evolutions of Orbiting Black-Hole Binaries without Excision [J]. Phys Rev Lett, 2006, 96:111 101.
7. 陈永明，质电类比当量和引力波，中国基础科学，2008 年，第 1 期，p.1.