

平直时空中修正的牛顿引力理论 计算广义相对论的四个经典实验

梅晓春

福州原创物理研究所

内容摘要 本文在平直时空的基础上，采用修正的牛顿引力理论，计算广义相对论的四个经典实验。得到比广义相对论更好的结果，由此证明爱因斯坦弯曲时空引力理论是没有必要的。文中假设光子在引力场中受引力的作用，引力质量是运动质量的两倍。在平直时空的基础上，按照牛顿引力理论方式，建立光子在球对称引力场中的运动方程。由此证明光在太阳引力场中沿双曲线运动，同样可以解释光线的偏折和光谱的红移。同时指出如果光受引力的作用，引力场中的光速就应当是超真空光速的。本文最后讨论平直时空中牛顿引力理论的改造和未来发展方向问题，并简单介绍了国内几个非主流学者完成的、对引力具有重要意义的实验。

关键词：广义相对论，牛顿引力理论，光线偏折，雷达波时间延迟，引力红移，水星近日点进动

一 前言

本文在平直时空的基础上，采用修正的牛顿引力理论计算广义相对论的四个经典实验，以此证明爱因斯坦弯曲时空引力理论是没有必要的。

作者在文献【1】中证明，广义相对论采用弧长作为变分参数建立短程线方程，在太阳系弱引力场中做牛顿近似，推导行星运动方程时用到近似条件 $ds = cdt$ 。然而这个条件是错误的，它会导致理论自我纠缠，引起严重的矛盾。按照正确的计算方法，就无法得到现有广义相对论的运动方程。采用任意变分参数建立短程线方程，严格证明广义相对论的运动方程只能描述物体的抛物线轨道的非周期运动，不可能描述椭圆轨道和双曲线轨道运动。

作者在文献【2】中证明，广义相对论描述光与行星在太阳引力场中运动的一元三次方程，有一个或三个实数根（运动轨道极点）。对于外太空恒星发出的进入太阳系的光，运动轨道只有一个极点。该极点位于太阳内部离中心点 $2.95 \times 10^3 \sim 2.11 \times 10^4$ 米的地方，外太空恒星发出的光将进入太阳内部被消融，不可能被地球观察者看到。因此地球的夜空是没有星光的，但这显然与事实不符。

现有广相对论在做计算时，总是把光线的轨道极点选在太阳表面，光线的偏转角为 $1.75''$ 。如果光线的轨道极点在 $r_2 = 2.11 \times 10^4$ 米处，光线的偏转角为：

$$\Delta\theta = \frac{4GM}{c^2 r_2} = \frac{4GM}{c^2 R} \frac{R}{r_2} = 1.75'' \times 3.3 \times 10^4 \quad (1)$$

它广义相对论计算结果的 33000 倍，与实际观察就完全不符。光在太阳引力场中的偏折实验并没有证明广义相对论成立。

雷达波在地球和水星之间传播时，按照广义相对论的计算，光线的轨道极点在太阳表面，时间

延迟为 2.40×10^{-4} 秒。如果轨道极点在 $r_2 = 2.11 \times 10^4$ 米处，时间延缓则是：

$$\Delta t \approx \frac{2\alpha}{c} \left(\ln \frac{4r_e r_p}{r_2^2} + 1 \right) = 6.21 \times 10^{-4} \text{ 秒} \quad (2)$$

是现有广义相对论计算结果的 2.58 倍。更重要的是雷达波进入太阳内部，实际上不可测量。

按照广义相对论，可以将光在太阳系引力场中与时间有关的运动方程改写成牛顿引力理论的能量守恒形式 **【2】**、**【3】**：

$$\frac{1}{2} m_0 \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{2GMm}{r} \left[1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2c^2 r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} m_0 c^2 \quad (3)$$

其中 L 是单位质量的角动量， $m_0 c^2 / 2 = h\nu$ 可以看成是光子在引力场外真空中的能量，对应的静止质量 $m_0 = 2h\nu / c^2$ 。将 (75) 式与牛顿引力理论比较，广义相对论的修正等价于将光子的引力质量用以下式表示：

$$m_g = 2m_0 \left[1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2c^2 r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)^2 \right] \quad (4)$$

当 $r > \alpha$ 时光子在引力场中的引力势能是正值，意味着光子实际上受排斥力的作用。由于总能量为正，光子在弱引力场中的牛顿运动轨道是双曲线。假设光线的轨道极点在太阳表面附近， $L \approx cR$ 。在 $r \gg R \gg \alpha$ 的区域，就有 $m_g = 2m_0$ 。也就是说按照广义相对论，光在太阳弱引力场的引力质量大约是惯性质量的两倍。

当光子沿矢径方向进入太阳引力场时， $L = 0$ ，(3) 式变成：

$$\frac{1}{2} m_0 \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{2GMm_0}{r} \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) = \frac{1}{2} m_0 c^2 \quad (5)$$

当光子沿矢径方向进入太阳引力场时，考虑到 $\alpha/r < 1$ ，光子的速度和加速度为：

$$V \approx c \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{r}} \approx c \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) \quad a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{c^2 \alpha}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) > 0 \quad (6)$$

光子在引力场中受排斥力的作用，与引力的概念是完全相悖的。如果受到的是排斥力的作用，光在太阳引力场中的弯曲方向是相反的，与实际观察就会不一致 **【2】**。

由此可见，在广义相对论的四个经典实验检验中，与引力场方程有关的三个实验解释都是错的 (光的引力红移与等效原理有关，与引力场方程无关)。广义相对论对牛顿引力理论的修正不成立，爱因斯坦弯曲时空引力理论是不可能的。引力理论必须回到经典的动力学描述方式，在平直时空中通过对牛顿引力理论的改造进行重建。

本文假设光子引力质量是运动质量的两倍。在引力场中光受引力的作用被加速，运动速度大于真空光速。在平直时空的基础上，按照牛顿引力理论方式，建立光子在球对称引力场中的运动方程。证明光在太阳引力场中沿双曲线运动，同样可以解释光线的偏折和光谱的红移。

本文最后讨论引力理论的改造和未来发展问题。通过引入类磁引力，按经典电磁场理论的方式，通过对牛顿引力理论的改造，在平直时空中建立动力学描述方式的引力理论。这种引力理论同意能够解释现有的引力实验，照样能够预言引力波的存在。还简单介绍了国内几个非主流学者完

成的、对引力具有重要意义的实验。比如切向漩涡力实验，温度影响引力的实验，引力传播速度实验等等，都是非常具有创意的。

从更本质上说，如何改造牛顿引力理论是一个实验问题。而不是像爱因斯坦做的那样，通过纯理论猜想的构建来搭建空中楼阁。引力理论必须遵循实验为王的原则寻求发展，只有这样做才是回归科学求真的本源。

二 用修正的牛顿引力理论计算光的偏折

2.1 有质量的粒子在牛顿有心引力场中的运动

质量为 m_0 的粒子在球对称引力场中运动，牛顿力学引力公式为：

$$\vec{F} = -\frac{GMm_0\vec{r}}{r^3} \quad F = -\frac{GMm_0}{r^2} \quad (7)$$

采用极坐标，运动方程是：

$$m_0(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F \quad (8)$$

$$m_0(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (9)$$

将 (9) 式积分，得 $r^2\dot{\theta} = h = \text{常数}$ 。令 $u = 1/r$ ，可以将 (8) 式转化成比尼公式【4】：

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \quad (10)$$

上式的解为：

$$u = \frac{GM}{h^2} + A \cos \theta \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (11)$$

其中 p 是半正焦弦， e 偏心率，定义为：

$$p = \frac{h^2}{GM} \quad e = Ap = \frac{Ah^2}{GM} \quad (12)$$

偏心率 $e < 1$ 时，(11) 式描述椭圆轨道，如图 1 示。设椭圆轨道的长半轴是 b ，在近日点 $\theta = 0$ ， $r = b(1 - e)$ ，在远日点 $\theta = \pi$ ， $r = b(1 + e)$ ，按 (11) 和 (12) 式可得：

$$p = b(1 - e^2) \quad h^2 = GMb(1 - e^2) \quad (13)$$

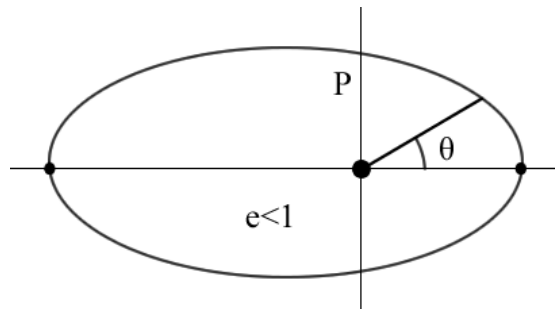


图 1. 粒子在牛顿引力场中的椭圆轨道

能量守恒方程是：

$$\frac{1}{2}m_0(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm_0}{r} = E \quad (14)$$

将近日点的值 $r=b(1-e)$ ， $\dot{r}=0$ 和 $r^2\dot{\theta}=h$ 代入上式，得：

$$E = \frac{m_0h^2}{2b^2(1-e)^2} - \frac{GMm_0}{b(1-e)} = -\frac{GMm_0}{2b} < 0 \quad (15)$$

因此做椭圆运动的粒子的总能量小于零。

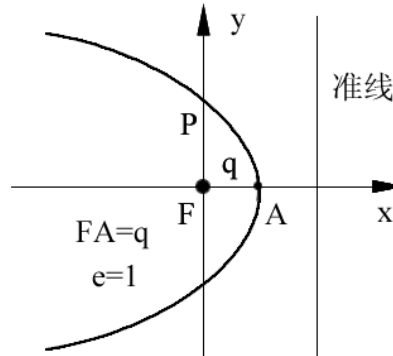


图 2. 粒子在牛顿引力场中的抛物线轨道

偏心率 $e=1$ 时的轨道是抛物线，如图 2 所示。在近日点 $\dot{r}=0$ ， $r=q$ ，则有 $p=2q$ ， $h^2=GM2q$ ，代入 (14) 式，可得粒子的总能量为零：

$$E = \frac{m_0h^2}{2q^2} - \frac{GMm_0}{q} = 0 \quad (16)$$

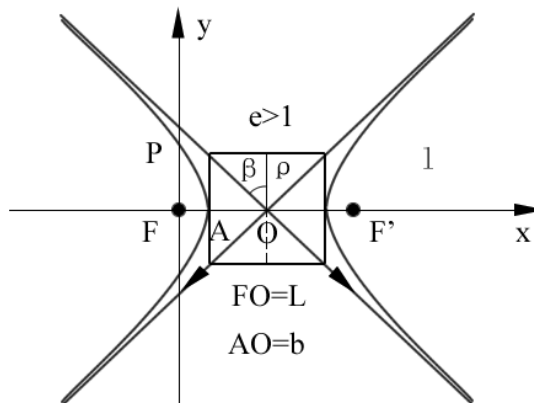


图 3. 粒子在牛顿引力场中的双曲线轨道

偏心率 $e>1$ 时的轨道是双曲线，如图 3 所示。与 (13) 式不同，此时我们有：

$$p = b(e^2 - 1) \quad h^2 = GMb(e^2 - 1) \quad (17)$$

在近日点 $\dot{r}=0$ ， $r=b(e-1)$ ，代入 (14) 式，可得粒子的总能量大于零：

$$E = \frac{m_0 h^2}{2b^2(e-1)^2} - \frac{GMm_0}{b(e-1)} = +\frac{GMm_0}{2b} > 0 \quad (18)$$

2.2 光在牛顿有心引力场中的运动

假设光子也按牛顿理论的方式在引力场中做双曲线运动，光子等价的静止质量为 m_0 ，但引力质量 m_g 与惯性运动质量不相等。令 $m_g = km_0$ ，运动方程 (7) 和 (10) 式变成：

$$\vec{F} = -\frac{GMkm_0\vec{r}}{r^3} \quad F = -\frac{GMkm_0}{r^2} \quad (19)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMk}{h^2} \quad (20)$$

(11)，(13) 和 (18) 式也相应地变成：

$$u = \frac{GMk}{h^2} + A\cos\theta \quad r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \quad (21)$$

$$h^2 = GMkb(1-e^2) \quad (22)$$

$$E = \frac{m_0 h^2}{2b^2(e-1)^2} - \frac{GMkm_0}{b(e-1)} = \frac{GMkm_0}{2b} \quad (23)$$

能量守恒方程也该写为：

$$\frac{1}{2}m_0(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMkm_0}{r} = \frac{GMkm_0}{2b} \quad (24)$$

设 $r \rightarrow \infty$ 时，光子的速度为真空中的光速，从上式得：

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{GMk}{2b} \quad \text{或} \quad b = \frac{GMk}{c^2} \quad (25)$$

另一方面，按照圆锥曲线理论，双曲线方程可写为：

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{\rho^2} = 1 \quad (26)$$

如图 3 所示，双曲线的实半轴是 b ，虚半轴是 ρ ，焦距为 $2L$ ，有：

$$L = \sqrt{b^2 + \rho^2} \quad e = L/b > 1 \quad (27)$$

对于光线从太阳表面略过的情况， $L = R + b$ ， R 是太阳半径，就有：

$$L^2 = (b + R)^2 = b^2 + \rho^2$$

$$\rho = \sqrt{R^2 + 2bR} = R\sqrt{1 + 2b/R} \quad (28)$$

从图 3 可知：

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{R\sqrt{1+2b/R}} \quad (29)$$

按照 (26) 式, $2b = \alpha k \ll R$, 得:

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi \approx \frac{b}{R} \quad (30)$$

从无穷远处来的光线的偏折角为:

$$\Delta \varphi = 2\varphi = \frac{2b}{R} = \frac{2GMk}{c^2 R} \quad (31)$$

取 $k=1$, 偏折角就是广义相对论计算结果的一半, 德国慕尼黑天文台的索德纳 1804 年最早得到这个结果, 预言了光线经过太阳边缘时会发生 0.875 角秒的偏折【5】。但由于十八世纪和十九世纪光的波动说占据上风, 索德纳的预言没有被认真对待。

取 $k=2$, 偏折角就是广义相对论计算的结果:

$$\Delta \varphi = 2\varphi = \frac{4GM}{c^2 R} \quad (32)$$

可见我们只要假设光子在球对称引力场中沿双曲线运动, 引力质量是惯性质量的两倍, 就可以解释光在太阳引力场中的偏折, 完全不要爱因斯坦的弯曲时间引力理论。

2.3 光在太阳引力场运动轨道的偏折

如果光线在引力场中受排斥力作用, 与 (19) 式类似, 假设 $m_g = km_0$, 光子受力为:

$$\vec{F} = \frac{GMkm_0\vec{r}}{r^3} \quad F = \frac{GMkm_0}{r^2} \quad (33)$$

令 $u = 1/r$, 运动方程 (20) 式变成:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{GMk}{h^2} \quad (34)$$

(34) 式的解是:

$$r = \frac{p}{e \cos \theta - 1} \quad e = Ap = \frac{Ah^2}{GMk} \quad (35)$$

(35) 式与 (21) 式有所不同。为了求出近日点, 将上式对 θ 求导, 近日点条件为:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-p \sin \theta}{(e \cos \theta - 1)^2} = 0 \quad (36)$$

近日点的角度 $\theta=0$, 就有 $r = b(e-1) = p/(e-1)$, 得 $p = b(e-1)^2$, 从而有:

$$p = \frac{h^2}{GMk} = b(e-1)^2 \quad h^2 = GMkb(e-1)^2 \quad (37)$$

(37) 式与 (17) 式也有所不同, 光子在引力场中的能量守恒方程变成:

$$m_0(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{2GMkm_0}{r} = m_0c^2 \quad (38)$$

在近日点, $r = b(e-1)$, $\dot{r} = 0$, 从上式得:

$$\frac{h^2}{r^2} + \frac{2GMk}{r} = \frac{GMkb(e-1)^2}{b^2(e-1)^2} + \frac{GMk}{b(e-1)} = m_0c^2 \quad (40)$$

得：

$$b = \frac{GMk(e+1)}{c^2(e-1)} \quad (41)$$

代入 (31) 式，得：

$$\Delta\theta = 2\theta = \frac{2b}{R} = \frac{2GMk(e+1)}{c^2R(e-1)} \quad (42)$$

对于光的运动，同样取 $k = 2$ ，只有在双曲线的偏心率 $e \gg 1$ 时，上式才等于 (32) 式。

除此之外，由于光受排斥力的作用，偏折的方向与引力的情况是相反的。如图 3 所示，从图右边 A' 方向来的光线在排斥力的作用下沿曲线 L' 运动，被偏折到 B' 方向。在 B' 方向上的观察者看来，光线来自 A 方向。

显然这样的结果与实际过程不一致。也就是说按照广义相对论，光在引力场中受排斥力的作用，光线的弯曲方向与目前的广义相对论计算方向是相反。即使按照 (3) 式的数值，广义相对论仍然无法解释光线在太阳引力场的偏折。

2.4 光在引力场中的速度

光线在太阳引力场中沿双曲线运动时，考虑 (25) 式， $b = \alpha$ ($k = 2$)，(24) 式可以写为：

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{GM}{b} + \frac{2GM}{r} = \frac{c^2}{2} + \frac{2GM}{r} \quad (48)$$

运动速度就可以为：

$$V_c^2 = c^2 + \frac{4GM}{r} \quad \text{或} \quad V_c = c\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{r}} \quad (49)$$

可见如果我们认为光受引力的作用，在引力场中光的速度就一定是超真空光速的。设太阳的半径为 R ，在太阳表面光速变成：

$$V_s = c\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{R}} \approx c\left(1 + \frac{\alpha}{R}\right) \quad (50)$$

在太阳表面观察，远处恒星发来的光线速度变快。反之，在远离太阳的地方观察太阳发出的光，会发现光线的速度变慢。同理，如果远处发出的光的速度是 c ，在地球表面测量，光速变成：

$$V_e = c\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{R_e}} \approx c\left(1 + \frac{\alpha}{R_e}\right) > c \quad (51)$$

其中 $R_e = 6.378174 \times 10^6$ 是地球的半径。因此在地球表面上测量，得到的光速 $V_e = 299792458$ 米/秒实际上不是真空的光速。考虑到地球的质量 $M_e = 5.9774 \times 10^{24}$ 千克， $G = 6.673231 \times 10^{-11}$ ，真正的真空光速应当是：

$$c = \frac{V_e}{\sqrt{1 + 4GM_e/(c^2 R_e)}} = 29979245759 \text{ 米/秒} \quad (52)$$

二者相差甚微， $V_e - c = 0.41$ 米/秒。如果是在太阳表面观察，将上式代入（50）式，光的速度变成 $V_s = 29980516397$ 米/秒，与真正的真空速度 $c = 299792457.59$ 米/秒相差12706.38米/秒，就是一个不小的数值。

三. 用修正的牛顿引力理论计算雷达波的时间延迟

如果假设光子的引力质量 m_g 是惯性质量的两倍即 $m_g = 2m_0$ ，并认为光子在引力场受引力的作用，速度就要大于真空中的光速。假设光子的引力质量是惯性质量的两倍，在引力场中下落是做加速运动。与广义相对论的运动方程不一样，按照牛顿引力理论，光的运动轨迹是双曲线，只有一个极点。这个极点在太阳表面附近，假设雷达波在太阳表面附近 $D \geq R$ 掠过，雷达波满足修正的运动方程（20）和（21）式，取 $k = 2$ ，其解为：

$$u = \frac{\cos\theta}{D} + \frac{2GM}{h^2} \quad \text{或} \quad D = r \left(\cos\theta + \frac{2GM}{h^2} D \right) \quad (53)$$

令 $A = 2GM/h^2$ ，由于 D 是一个常数，得：

$$dD = (\cos\theta + AD)dr - r\sin\theta d\theta = 0 \quad (54)$$

从上式得：

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(\cos\theta + AD) dr}{r\sin\theta dt} = \frac{(\cos\theta + AD) dr}{\sqrt{r^2 - r^2 \cos^2\theta} dt} = \frac{D}{r\sqrt{r^2 - r^2 \cos^2\theta}} \frac{dr}{dt} \quad (55)$$

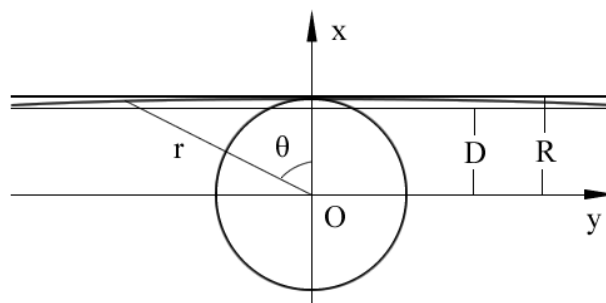


图 4. 用牛顿引力理论计算雷达波的时间延迟

代入（48）式，就有：

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{D^2}{r^2 - r^2 \cos^2\theta} \right) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{c^2}{2} \left(1 + \frac{2\alpha}{r} \right) \quad (56)$$

将（53）式改写成 $r\cos\theta = D(1 - A)$ ，代入上式，得：

$$\sqrt{1 + \frac{D^2}{r^2 - D^2(1 - Ar)^2}} \frac{dr}{dt} = c \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{r}} \quad (57)$$

在太阳表面 $R = b(e - 1) = 6.95987 \times 10^8$ ， $b = \alpha$ ，得：

$$e = \frac{R}{b} + 1 = \frac{R}{\alpha} + 1 = \frac{6.95987 \times 10^8}{2.95 \times 10^3} + 1 = 2.35929 \times 10^5 \quad (58)$$

$$A = \frac{2GM}{h^2} = \frac{2GM}{2GMb(e-1)^2} = \frac{1}{b(e-1)^2} = 6.09002 \times 10^{-15} \quad (59)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{D} - \frac{GM}{h^2} = \frac{1}{D} - A \quad D = \frac{R}{1-RA} \approx R \quad (60)$$

$$AD^2 = 6.09002 \times 10^{-15} \times 6.95987^2 \times 10^{16} = 2.94999 \times 10^3 \approx \alpha \quad (61)$$

$$A^2 D^2 = 6.09002^2 \times 10^{-30} \times 6.95987^2 \times 10^{16} = 1.79655 \times 10^{-11} \ll 1 \quad (62)$$

考虑到 $\alpha/r \ll 1$ ，可将 (57) 式写成：

$$\begin{aligned} cdt &= \sqrt{1 + \frac{D^2}{r^2 - D^2(1-Ar)^2}} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr \\ &= \sqrt{1 + \frac{D^2/r^2}{1 - D^2A^2 + 2AD^2/r - D^2/r^2}} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr \\ &= \sqrt{\frac{1 - D^2A^2 + 2AD^2/r}{1 - D^2A^2 + 2AD^2/r - D^2/r^2}} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr \end{aligned} \quad (63)$$

按照 (62) 式， D^2A^2 可略去，利用 (61) 式，可得：

$$\begin{aligned} cdt &\approx \frac{\sqrt{1 + 2D^2A/r} (1 - \alpha/r) dr}{\sqrt{1 - D^2/r^2} \sqrt{1 - 2D^2A/r}} \approx \frac{(1 + \alpha/r)(1 - \alpha/r) dr}{\sqrt{1 - D^2/r^2} (1 - \alpha/r)} \\ &= \frac{(1 + \alpha/r) dr}{\sqrt{1 - D^2/r^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - D^2}} \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr \end{aligned} \quad (64)$$

上式的积分是：

$$ct = \sqrt{r^2 - D^2} \Big|_b^{r'_e} + \alpha \ln(r - \sqrt{r^2 - D^2}) \Big|_b^{r'_e} \quad (63)$$

地球轨道半径 $r_e = 1.50 \times 10^{11}$ 米，水星轨道半径 $r_p = 5.55 \times 10^{10}$ 米。雷达波在地球和水星之间往返的时间延迟为：

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{2\alpha}{c} \left[\ln \frac{(r_e + \sqrt{r_e^2 - D^2})}{D} + \ln \frac{(r_p + \sqrt{r_p^2 - D^2})}{D} \right] \\ &\approx \frac{4\alpha}{c} \ln \frac{4r_e r_p}{D^2} = \frac{8GM}{c^3} \ln \frac{4r_e r_p}{D^2} = 2.19 \times 10^{-4} \text{ 秒} \end{aligned} \quad (64)$$

与广义相对论的计算的 2.40×10^{-4} 秒相比，相差 8%。关于雷达波延迟，至今的实验都声称与广义相对论的理论预言相符。然而仔细的分析会发现，这类实验的数据处理采用的是拟合方法，实际上

是依赖与理论模型的，因此实验总是能与实验一致的。我们实际上不能说雷达波延迟的实验已经证明广义相对论的正确性，详细的分析见本文附录。

四 用修正的牛顿引力理论计算光的引力红移

4.1 用等价原理不可能解释光的引力红移

在广义相对论中，引力红移是通过等价原理来进行解释的，与引力场方程无关。以下证明用等价原理解释光谱引力红移会导致自相矛盾，因此是不可能的。

设在 $r_0 \rightarrow \infty$ 处没有引力场时，静止的原子发出光的固有频率为 ν_0 ，固有波长为 λ_0 。在球对称引力场的 r_1 点，光频率和波长为 ν_1 和 λ_1 。假设引力场中光速不变，即 $c = \lambda_1 \nu_1 = \lambda_0 \nu_0$ 。按照等价原理，在球对称引力场 r_1 处，时间延缓为【3】：

$$d\tau_0 = dt \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_0}} \quad d\tau_1 = dt \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_1}} \quad (57)$$

其中 $d\tau_0$ 和 $d\tau_1$ 为固有时， dt 是坐标时。频率和时间的关系是【3】：

$$\nu_1 d\tau_1 = \nu_0 d\tau_0 \quad (58)$$

就有：

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{d\tau_0}{d\tau_1} = \frac{\sqrt{1 - \alpha/r_0}}{\sqrt{1 - \alpha/r_1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha/r_1}} \quad (59)$$

红移则为：

$$Z = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 1 - \frac{\nu_0}{\nu_1} = 1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_1}} > 0 \quad (60)$$

在弱场条件下当 $\alpha/r_1 \ll 1$ 时，有 $Z = \alpha/(2r_1) = GM/(c^2 r_1)$ 。在强场条件下 $\alpha/r_1 \approx 1$ 时，最大红移 $Z = 1$ 。以上计算数学上没有问题，逻辑上却存在问题。导出引力红移的过程引入以下三个假设：

1. 引力场使时间过程变慢，满足（57）式。
2. 静止在引力场中的原子发出的光的频率变小。
2. 引力场中光速不变。

这三个假设存在以下问题，用同等效原理实际上不能解释光的引力红移。

1) 前文已经证明，按照广义相对论，引力场中光速不可能是常数。

2). 按照（57）式的写法， dt 变成固有时， $d\tau_0$ 和 $d\tau$ 是坐标时。然而在弯曲时空中， dt 应当是坐标时，在引力场中不同位置上 dt 是不一样的。因此推导过程存在概念混乱，从（57）式不可能得到（59）式。

3)（58）式也有问题。按理说时间变慢时光的振动频率也变慢，但按（58）式 $d\tau_1$ 变小时 ν_1 变大，二者成反比，在物理上说不通。

4) 按照广义相对论，光在引力场中传播时能量不变。然而光子的能量与频率成正比，即 $E = h\nu$ 。弯曲时空引力理论是几何理论，没有势能的概念。能量不变意味着光的频率不变，引力场

中光的频率改变导致矛盾。

4.2 光的引力红移

按照修正的牛顿引力理论，考虑以下几点，可以真正合理解释光谱的引力红移：

1. 原子发光过程受电磁相互作用支配，电磁场相互强度是引力相互作用的 10^{40} 倍，因此引力对于原子发光过程的影响可以忽略不计。在引力场的某点上静止的原子，发出的光的速度、波长和频率，等于静止在真空中的原子发出的光的速度、波长和频率。或者说其改变量非常小，在实验上难以测量。

2. 原子发出的光在引力场中运动时，速度、波长和频率都要改变。

3. 光的引力质量是惯性质量的两倍，即 $m_g = 2m_0$ 。

4. 设光在引力场外真空中速度为 c ，按照 (49) 式，光在球对称引力场中运动到 r 点时，速度变为：

$$V_c = c\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{r}} \quad (61)$$

5. 设某原子静止在引力场外 $r_0 \rightarrow \infty$ 的点上，发出的光的（固有）波长为 λ_0 ，（固有）频率为 ν_0 ，且 $c = \lambda_0\nu_0$ 。光到达引力场 r 点时，速度变为 $V_c = c_1 = \lambda_1\nu_1$ 。设光的频率和波长按以下方式改变：

$$\nu_1 = \nu_0\left(1 + \frac{2\alpha}{r}\right) > \nu_0 \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \alpha/r}} < \lambda_0 \quad (62)$$

波长与频率的改变是不对称的，但波长在实验上可以测量的，而频率则是不可测量的。

6. 对于静止在 r 点上观察者，光的波长就发生紫移（波长变小），有：

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha/r}} - 1 < 0 \quad (63)$$

7. 静止在引力场中 r 点上的原子发出的光仍然满足关系 $c = \lambda_0\nu_0$ 。该光运动到引力场外 $r_0 \rightarrow \infty$ 的位置时，受引力的减速作用速度变小，有：

$$V_\infty = \frac{c}{\sqrt{1 + \alpha/r}} < c \quad (64)$$

8. 与静止在引力场外的原子发出的光比较，光的频率变小，波长变大，有：

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{1 + \alpha/r} < \nu_0 \quad \lambda_1 = \lambda_0\sqrt{1 + \frac{\alpha}{r}} > \lambda_0 \quad (65)$$

9. 在引力场外静止参考系中观察，波长红移，有：

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = \sqrt{1 + \frac{\alpha}{r}} - 1 \quad (66)$$

10. 如果是弱引力场， $\alpha/r \ll 1$ ，就有：

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} \approx \frac{\alpha}{2r} = \frac{GM}{c^2 r} \quad (67)$$

结果与广义相对论一样，但逻辑上变得更合理。

五 平直时空中牛顿引力理论的改造

5.1 按经典电磁理论方式建立引力理论

考虑到牛顿引力公式与经典电磁理论的库伦公式完全一样，通过引入类磁引力，可以按经典电磁场理论的方式重建引力理论。这种理论考虑狭义相对论效应（洛伦兹变换公式），同样可以解释广义相对论的实验，并预言引力波的存在。关于这个问题至今已经有很多人讨论过，详情可见文献【6】。在此基础上，再考虑以下可能存在的新发现的引力效应。

5.2 朱永焕切向涡旋力

按照牛顿引力理论，两个球体的引力只与距离有关，与球体的运动速度无关。当一个球体转动时，产生的引力场仍然只有沿着质量中心方向的法向分量，没有沿球面切线方向的切向分量。自从牛顿提出万有引力理论三百多年以来，这个结论从来没有变化，这个局面有可能被朱永焕实验打破。爱因斯坦引力理论也是没有切向力，一次朱永焕实验也直接否定广义相对论。

朱永焕先生 1982 年江西师范大学物理系毕业后在南昌铁路中学当物理教师。二十年多年以来与许多学生一起用卡文迪许扭秤做了大量实验，证明转动球体会产生沿球面与转动轴垂直方向的引力【7】，可将之称为朱永焕涡旋力。

如图 5 所示，先按正常的卡文迪许扭秤实验方法，将两个大球分别放两个小球连杆垂直的位置，在球体静止的情况下测量球体的万有引力 F_n ，证明该仪器符合实验要求。然后将一个大球放到与两个小球连杆平行的位置，如图 6 所示。将大球旋转，再测量大球对小球产生的切向力 F_t 。

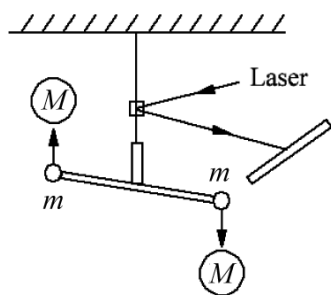


图 5.卡文迪许扭秤测量法向力图

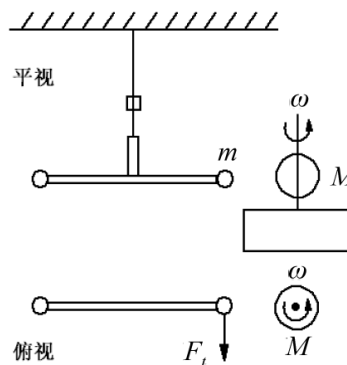


图 6.卡文迪许扭秤测量测量切向涡旋力

大球 M 以每秒 0.5 ~ 3 圈的速度平稳缓慢地转动，结果发现悬丝扭动，引起投影屏上激光点移动，移动方向与大球转动方向有关。大球逆时针转动，每秒转动一圈次时，光点移动 0.5mm；顺时针方向转动时，移动 -0.5 mm。实验结果重复性很好，说明切向引力确实存在。

采用不同质量的大球，证明该力与质量成正比。如果采用相同半径的空心铜球，则光点移动的距离甚微。改变大球与小球的距离，实验证明切向引力与两球质心的距离成反比。经过大量数据分析，朱永焕得到切向引力的数学表达式

$$F_i = \frac{KGMm\omega \sin \alpha}{2\pi r^2} \quad (68)$$

其中 $K=0.4$ ， M 是旋转球体质量， ω 是转动角速度， m 是静止球体的质量， α 是与小球质心和大球质心连线与转动平面的夹角， r 是两球体质心距离。在朱永焕的实验中，球体的最大旋转速度是每秒 3 圈，属于低速转动。如果是高速转动，(68) 式的关系是否仍然成立，需要进一步的实验检验。

5.3 朱永焕力的应用

朱永焕力有广泛的应用，以下做简单介绍。

1) 计算月球远离地球与地球远离太阳的速率

1969 年美国阿波罗飞船登月时在月球上放置激光反射镜，之后连续对地球和月球之间的距离进行测量，发现 30 年来二者之间的距离增加了 1 米多，意味着月球以每年 3~4 厘米的速度离开地球，这个现象是目前任何理论都解释不了的。

如果地球自转会产切向力，就可能很好地解释这种现象。设转动地球对月球的涡旋切向力为 $F_t = ma_t$ ， a_t 是切向加速度。在此力作用下，月球经过时间 t 增加的运动距离是 $\Delta L = a_t t^2 / 2$ ，力对月球做功为 $\Delta E = F_t \Delta L = ma_t^2 t^2 / 2$ ，结果使月球的动能和势能同时增加。设月球动能增量为 ΔT ，势能增量为 ΔU ，就有

$$\Delta E = \frac{ma_t^2 t^2}{2} = \Delta T + \Delta U \quad (69)$$

考虑理想情况，按照牛顿引力理论，物体在引力场中做圆周运动时，动能与势能一样大，可令 $\Delta T = \Delta U$ 。由于在短时间内月地之间的距离 r 变化很小，可令 $\Delta U = mg \Delta h$ ，其中 $g = GM / r^2$ 。取地球的质量 $M = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ，地月之间的距离 $r = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$ 。地球 1 天自转动一圈， t 取 1 天，则 $\omega t = 2\pi$ 。将以上数值代入 (69) 式，得：

$$\Delta h = \frac{a_t^2 t^2}{4g} = \frac{(0.4GM / r^2)^2}{4GM / r^2} = \frac{0.04GM}{r^2} = 1.082 \times 10^{-4} \text{ 米} \quad (70)$$

月球每年离开地球的距离为 $365\Delta h = 3.95 \times 10^{-2}$ 米，与实际测量一致。用同样的方法计算，太阳每 25 天转动一圈，地球每年离开太阳 0.35 厘米，100 年为 0.35 米。水星每年离开太阳 2.32 厘米，100 年为 2.32 米。

II) 计算“先驱者 10 号”等宇航器的轨道偏离

从 1970 年代起，美国航天局发射了探测木星、土星等太阳系行星的“先驱者 10”、“先驱者 11 号”、“伽利略”以及“尤利西斯”的一系列宇宙飞行器。发现这些飞行器都普遍偏离用爱因斯坦引力理论的后牛顿近似计算出来的轨道，飞行器的减速度要比预期大，误差主要在沿太阳质心的法线方向【8】。这种引力反常现象至今没能得到解释。

朱永焕涡旋力在切线方向，对法线方法的偏离没有贡献，但对轨道的偏离有影响。比如在地球绕太阳轨道上，朱永焕涡旋力产生的切向加速度是 $\Delta a_c = 1.10 \times 10^{-9} \text{ m/s}^2$ ，对航天器偏离预定轨道的影响很大。除此之外，还可以用于以下物理过程的研究：

III) 对水星近日点进动值的影响。

- IV) 对人造卫星轨道稳定性的影响。
- V) 太阳系角动量分配不对称问题。
- VII) 对中子星等的影响。
- VIII) 对流体力学中湍流现象的影响。

5.4 温度 (电磁相互作用) 对引力的影响实验

温度的本质是原子和分子热运动，由电磁相互作用支配。按照现有物理学的理解，电磁相互作用于引力相互作用是独立的。因此温度的概念与引力无关，或者说物体的热运动不会对引力产生影响。不论两个物体的温度是高还是低，它们之间的万有引力是一样的。

然而事实并非如此，我国学者李华旺，刘武青，范良藻，冯劲松，等人做了大量实验，发现物体的温度对引力有影响【9】，【10】。趋向于得出结论，温度越高引力越小。刘武青用保温瓶加热水和冷水，放到卡文迪许扭秤上，观察光标的移动。冯劲松，范良藻则通过称量温度不同物体的重量的方式研究温度对引力的影响。李华旺则采用自制的大型扭秤，在密封的山洞里测量环境温度对引力的影响。

所有的实验结果都显示，温度对万有引力的影响是非常显著的。这种结果与牛顿引力理论和爱因斯坦的引力理论是完全相悖的，牛顿引力理论和爱因斯坦引力理论中没有温度的地位。按照爱因斯坦质能关系，原子分子的速度越大越大质量也越大。对于速度较小的情况，对能量的影响在 V^2/c^2 的数量级，大约为百万分之一。而且是速度越高引力越大。然而李华旺等人的实验显示，温度对引力的影响比 V^2/c^2 的数量级大得多，可能高达万分之一的数量级。而且可能是温度越高引力越小。如果这种结果得到证实，意味这高温的发光天体质量变轻，会对天体物理学将产生很重要的影响。

附录：雷达波时间延迟实验存在的问题

从 1970 年开始，许多关于雷达波延迟的实验都声称与广义相对论的理论预言相符，而且符合的精度越来越高。2003 年卡西尼号土星探测器的实验居然声称误差小于 0.002%。以下我们从实验的角度来分析，为什么会出现这种结果。

由于太阳系中的天体绕太阳不断地运动，要在 200 秒内确定天体的精确位置是一件非常困难的。广义相对论认为空间弯曲，物体在弯曲空间中运动，其位置就不仅是一个测量的问题，而是一个理论问题。因此雷达波的延迟实验就不仅仅是一个时间测量问题，而是与理论纠缠在一起的，结果就必然会导致很大的不确定性。

为了能进行数据处理，通常需要假定发射雷达波和接受回波的地球静止，但实际上是不可能的。地球和金星的轨道虽然都比较接近圆形，但并不是真正的圆形，它们与太阳之间的距离实际上在不断变化。地球经过半年时间从远日点运动到近日点，与太阳之间的距离每秒改变为 317.83 米。时间延迟实验中，雷达波从地球表面发出到达金星的往返时间大约为 20 分钟。在这段时间内，地球与太阳之间的距离改变为 3.81396×10^5 米。

金星与太阳之间的距离每秒改变 93.595 米，雷达波从地球表面发出到达金星的 10 分钟内，金星与太阳之间的距离改变为 5.6157×10^4 米。因此在雷达波延迟实验中，地球和金星在矢径方向的距离最大改变值为 $381396 + 56157 = 4.37553 \times 10^5$ 米，最小改变值为 $381396 - 56157 = 3.25239 \times 10^5$

米。而雷达波 200 微秒时间延迟对应的距离改变是 $2 \times 10^{-4} c = 6 \times 10^4$ 米，只是地球和金星之间实际距离改变的 13.7% ~ 18%！此外在雷达波往返的 20 分钟时间里，地球和金星还存在沿轨道切线方向的距离改变约 3.333×10^3 米，由此引起的雷达波时间延迟约为 10^{-5} 秒，是测量值 2×10^{-4} 秒的 5.56%。

天体在空间的位置原则上可以通过星历表来确定，这可以用牛顿力学来计算。但问题是时间延迟是相对论效应，还需考虑空间弯曲造成的影响。因此了解天体空间位置的变化决非易事，事实上在雷达波延迟实验中，天体在空间的位置不是测量出来的，而是用广义相对论计算出来的。考虑到天体处于运动状态，为了使雷达波的时间延迟与天体距离的变化自洽，需要采用牛顿迭代方法【11】。

以下以激光天文动力学空间计划（ASTROD）为例【12】，来具体讨论这个方法。以此说明雷达波的延迟是计算出来的，不是测量出来的。该实验设计向太空发射航天器到达太阳附近，从地球表面发射激光，航天器将激光反射回地球，测量时间延迟。设地面激光器在 t_1 时刻反射激光，此时地球（激光器）的空间坐标是 $\bar{r}(t_1)$ 。激光在 t_2 时刻到达航天器，航天器的空间坐标是 $\bar{r}'(t_2)$ 。设上行激光传播时间为 T ，我们有 $t_2 = t_1 + T$ 。航天器在 t_3 时刻反射激光，空间坐标是 $\bar{r}'(t_3)$ 。地球观察站在 t_4 时刻接受到反射回来的激光，空间坐标是 $\bar{r}(t_4)$ 。下行激光传播时间为 T' ，有 $t_3 = t_4 - T'$ 。令 $\rho(t_1, T) = |\bar{r}(t_1) - \bar{r}'(t_1 + T)|$ ， $\rho'(t_4, T') = |\bar{r}(t_4) - \bar{r}'(t_4 - T')|$ ，将广义相对论的实验计算公式写为：

$$T = \frac{1}{c} |\bar{r}(t_1) - \bar{r}'(t_1 + T)| + \frac{\alpha(1+\gamma)}{2c} \ln \frac{r'(t_1 + T) + r(t_1) + \rho(t_1, T)}{r'(t_1 + T) + r(t_1) - \rho(t_1, T)} \quad (71)$$

$$T' = \frac{1}{c} |\bar{r}(t_4) - \bar{r}'(t_4 - T')| + \frac{\alpha(1+\gamma)}{2c} \ln \frac{r'(t_4 - T') + r(t_4) + \rho'(t_4, T')}{r'(t_4 - T') + r(t_4) - \rho'(t_4, T')} \quad (72)$$

上式中 γ 是一个可调参数，令 $\gamma = 1$ 就是广义相对论的结果。需要注意的是，按照（71）式，在激光的上行传播过程中，假设地球的位置不随时间而变，只与初始时刻 t_1 有关。按照（72）式，在激光的下行传播过程中，也假设地球的位置不随时间而变，只与接受到激光的时刻 t_4 有关。

按理说只要通过测量知道地球在 t_1 时刻的位置 $\bar{r}(t_1)$ ，以及航天器在 t_2 时刻的位置 $\bar{r}'(t_1 + T)$ ，就可以通过（71）式确定时间延迟。然而情况并不是这样简单，由于地球和航天器始终处于运动状态，在雷达波传播的 20 分钟时间内，观察者根本无法通过测量知道在航天器的空间位置。实验者只能用理论来计算它的空间位置，因此时间延迟的测量实际上变成一个理论计算问题。

另外，地球观察者测量到的只是雷达波总的传播时间 $T + T'$ ，无法区分 T 和 T' 。即使能够区分 T 和 T' ，（71）式等号右边与 T 有关，根本无法将 T 解出。（72）式等号右边与 T' 有关，也无法将 T' 解出。这还涉及找到的 T 和 T' 能否满足（71）和（72）式，使结果自洽的问题。因此就不得不用所谓的牛顿迭代法来做计算。具体做法是，先假设（71）和（72）式右边第二项与 T 和 T' 无关，然后利用牛顿迭代法计算上行光和下行光的传播时间 T 和 T' ，迭代公式为【11】：

$$T^{i+1} = \frac{1}{c} |\bar{r}(t_1) - \bar{r}'(t_1 + T^i)| + \frac{\alpha(1+\gamma)}{2c} \ln \frac{r'(t_1) + r(t_1) + \rho(t_1)}{r'(t_1) + r(t_1) - \rho(t_1)} \quad (73)$$

$$T'^{i+1} = \frac{1}{c} |\bar{r}(t_4) - \bar{r}'(t_4 - T'^i)| + \frac{\alpha(1+\gamma)}{2c} \ln \frac{r'(t_4) + r(t_4) + \rho'(t_4)}{r'(t_4) + r(t_4) - \rho'(t_4)} \quad (74)$$

初始值取 $T^0 = 0$ 和 $T'^0 = 0$ ，直至 $|T^{i+1} - T^i| < 10^{-7}$ 和 $|T'^{i+1} - T'^i| < 10^{-7}$ 是迭代停止。由此得到的 T^{i+1} 和 T'^{i+1} 被认为就是光的上行和下行传播时间。

通过星历表或理论计算,了解天体和航天器的空间位置随时间的变化关系 $\bar{r}(t)$ 和 $\bar{r}'(t)$,按照(71)和(72)式就可以得到时间延迟量:

$$\Delta T = \frac{\alpha(1+\gamma)}{c} \ln \frac{r'(t_1+T) + r(t_1) + \rho(t_1, T)}{r'(t_1+T) + r(t_1) - \rho(t_1, T)} \quad (75)$$

$$\Delta T' = \frac{\alpha(1+\gamma)}{c} \ln \frac{r'(t_4-T') + r(t_4) + \rho'(t_4, T')}{r'(t_4+T') + r(t_4) - \rho'(t_4, T')} \quad (76)$$

从以上讨论可以看出,时间延迟量 ΔT 和 $\Delta T'$ 实际上是计算出来的,不是测量出来的。实验测量到的是总的传播时间 $T+T'$,如何从中分离出延迟量 ΔT 和 $\Delta T'$ 基本上是一个理论计算问题。这种计算方式实际上预先假定广义相对论的时间延迟公式是正确的,然后通过牛顿迭代方法,找到能使这个公式自洽的 T 和 T' 。再按照这个公式,时间延迟量 ΔT 和 $\Delta T'$ 就自然确定了。至于实际的时间延迟是不是 ΔT 和 $\Delta T'$,实际上仍然是未知的。

除此之外,我们知道,用广义相对论计算天体运动本身就是有问题的。自20世纪70年代以来,美国航天局发射了探测木星、土星等太阳系行星的“先驱者10号”、“先驱者11号”、“伽利略”以及“尤利西斯”等一系列宇宙飞行器。通过对飞行数据的分析,发现这些飞行器都普遍偏离原定的轨道达几十万公里【13】。而这些轨道都是用爱因斯坦引力理论计算的,飞行器的减速度要比预期大,额外加速度朝着太阳引力场中心方向,大小为 $10^{-10} m/s^2$ 【8】。美国航天局对这一现象深入研究,在排除了诸如软件错误、太阳风和泄气等因素后,认为这种称为“先驱者反常”的现象已是确切无疑地存在。在靠近太阳的区域,额外的加速度会更大。

事实上,天文学中还观察到许多现象都是用爱因斯坦引力理论无法解释的。比如恩克彗星的公转周期在不断缩短、哈雷彗星不断迟到、月球每年以3~4cm的速度离开地球,以及地球绕太阳的轨道不断扩张等,因此弯曲时空引力理论不可能是真正合格的引力理论。

实际测量过程还涉及许多自由参数,需要通过拟合方法来确定参数【14】。比如雷达波靠近太阳表面时太阳风的影响,水星金星等天体质量和表面形状的不确定性。如果用空间探测器反射雷达波,还涉及探测器受到的随机力的影响,以及飞行姿态控制和太阳辐射压涨落的影响等等,这些都会带来不可预测的误差。因此雷达波时间延迟实验是不可靠的,根本不可能用它来证实广义相对论。

事实上,除了科学方面的因素,还存在实验者心理作用的影响。对于这类与基础理论密切相关的,效应非常细微的物理学实验,实验者有可能受到理论提出者声望的影响,自觉不自觉地吧实验结果向理论靠拢。如果此前物理学家进行正确的计算,得到的时间延迟是 2.08×10^{-4} 秒,或 2.30×10^{-4} 秒,实验物理学家也一定会使实验符合这个结果。同时还会不断地提高实验精度,使广义相对论不断地得到证实。

参考文献

1. 梅晓春,俞平,计算机数值方法证明广义相对论的行星运动理论不成立,前沿科学,2016,第2期, p.75-96.
2. 梅晓春,广义相对论不可能描述太阳系中行星椭圆周期轨道运动的严格证明,前沿科学,2016,第4期, p.69~87.
3. S. 温伯格,引力论和宇宙论,科学出版社,1984, p.212,228.

4. 周衍柏, 理论力学, 江苏科学技术出版社, 1961, p. 117.
5. Jean Surdej & Jean-François Claeskens, Gravitational lensing, *The Century of Space Science*, pp.441-469, Kluwer Academic Publishers, 2001. p. 442.
6. 梅晓春, 第三时空理论与平直时空中的引力和宇宙学, 知识产权出版社, 2015, p. 179.
7. 朱永焕, 神秘的漩涡力, 二十一世纪出版社, 2005, p. 49.
8. John D Anderson, Philip A, et al. Study of the Anomalous Acceleration of Pioneer 10 and 11, <http://arXiv.org/abs/gr-qc/0104064>, <http://arXiv.org/abs/gr-qc/0512121>.
9. 刘武青, 温度影响引力、引力影响温度是互逆定律, 中国预印本服务系统, 2014-01-19。
10. 范良藻, 冯劲松, 刘武青, 实验发现物体的温度变化引起万有引力变化, 中国工程科学, 2010. 6.
11. 杨远贵, 利用地面深空激光测距检验相对论的引力延时, 云南天文台台刊, 2002年, 第二期。
12. T D Moyer. Mathematical Formulation of the Double Precision Orbit Determination Program (DPODP) [J]. Jet Propulsion Laboratory Technical Report: 32-1527.
13. F E Estabrook. *Astrophys J*, 1969, 158: 81.