

广义相对论不可能正确描述太阳系 引力场中光的运动的严格证明（注）

梅晓春

福州原创物理研究所

内容摘要 广义相对论对牛顿引力理论进行修正，在行星和光的运动方程中引入修正项，运动轨道的极点由一元三次方程确定。本文严格讨论该一元三次方程的极点问题，证明外太空恒星发出的光在太阳系引力场中的轨道是单极点的。该极点位于太阳内部，离太阳中心 $2.95 \times 10^3 \sim 2.11 \times 10^4$ 米地方。因此外太空恒星发出的光将消失在太阳内部，不可能被地球人观察到，然而事实并非如此。本文还讨论了光在太阳引力场中产生偏折的轨道方程及其线性叠加近似解。指出该解会导致自相矛盾的结果，因此它不是广义相对论运动方程的真正解。原因在于爱因斯坦引力场方程是非线性的，其解不满足线性叠加原理。按照广义相对论的运动方程，光在太阳引力场中受到的实际上是排斥力的作用，偏折的方向与引力的情况是相反的，广义相对论仍然无法解释光线在太阳引力场的偏折。由于雷达波的轨道极点也在太阳内部，广义相对论对雷达波时间延迟实验的计算也是错误的，广义相对论的光在引力场中运动的理论并没有得到实验的证实。本文进一步对广义相对论的光在引力场中的两个运动方程进行分析，指出与时间有关的运动方程可以看成是牛顿引力理论的近似，与时间无关的轨道方程则是与牛顿引力方程完全不同类型的方程。因此广义相对论的两个运动方程在物理上是互相矛盾的，广义相对论的光的引力理论是不成立的。

关键词：广义相对论，牛顿引力理论，光线的偏折，雷达波延迟，一元三次方程的根

一 前言

广义相对论对牛顿引力理论进行修正，在行星和光的运动方程中引入与 α/r^3 有关的项。作者在文章【1】中指出，广义相对论采用弧长作为变分参数建立短程线方程，在太阳系弱引力场中做牛顿近似，推导行星运动方程时用到近似条件 $ds = cdt$ 。然而这个近似条件是错误的，它会导致理论自我纠缠，引起严重的矛盾。按照正确的计算方法，就无法得到现有广义相对论的运动方程。

为了避免自我纠缠和近似计算的不确定性，作者采用任意变分参数建立短程线方程，严格证明广义相对论的运动方程只能描述物体的抛物线轨道的非周期运动，不可能描述椭圆轨道和双曲线轨道运动。因此对于太阳系中行星的运动，广义相对论是无效的。除此之外，采用计算机数值计算方法证明，广义相对论对牛顿引力修正会导致水星轨道的严重的形变。水星绕日一周近日点距离增加 9.4 万千米，远日点距离减小 7.4 万千米。水星绕日一周轨道的半正焦弦要改变几千米，这种改变是不对称的和可以累加的，会导致轨道严重变形，然而天文观察并没有发现这样大的改变。

另一方面，尽管广义相对论已经有一百年的历史，光在太阳引力场中运动轨道的极点问题一直

注：原文发表于《前沿科学》2016年12月第1期和第4期，本文做重新编排修改，请以本文为准。

没有被认真讨论。广义相对论计算太阳系中光的运动时，总是假设轨道的极点在太阳表面。然而这种做法是没有道理的，光的轨道极点需要通过运动方程来计算，不能预先假定。

广义相对论的光在太阳引力场中的运动是一元三次方程，有一个或三个实数根（或极点）。本文证明，外太空恒星发出的光在太阳系引力场中的轨道是单极点的。该极点位于离太阳中心 2950 ~ 21100 米地方，因此外太空恒星发出的光要进入太阳内部被消融，不可能被地球人观察到，地球的夜空应当是黑暗的。然而事实并非如此，广义相对论的光在太阳引力场中的计算是错误的，现有的两个实验检验并没有证明广义相对论成立。

本文还讨论了广义相对论光的运动方程的线性叠加解。指出该解导致自相矛盾的结果，因此实际上不是运动方程的真正解。原因在于爱因斯坦引力场方程是非线性的，其解不满足线性叠加原理，广义相对论的计算结果与实际观察一致纯属歪打正着。

进一步的分析表明，即使按照现有广义相对论的运动方程，光在太阳引力场中受到的是排斥力的作用，偏折的方向与引力的情况是相反的。也就是说即使按照广义相对论现有的计算结果，仍然无法解释光线在太阳引力场的偏折。

本文最后对广义相对论的光在引力场中的两个运动方程进行分析，指出与时间有关的运动方程可以看成是牛顿引力理论的近似。但光在引力场中受到的力不是引力，而是 $1/r^2$ 成正比的排斥力，使得光在引力场中做类双曲线轨道运动。与时间无关的轨道方程则是与牛顿引力方程完全不同类型的方程，描述的不是类双曲线轨道运动，导致星体发出的光进入太阳内部。因此广义相对论的两个运动方程互相矛盾的，说明广义相对论的光的引力理论是不成立的。

产生这个问题的原因在于，按照黎曼几何，弯曲空间的短程线与粒子的质量无关。但广义相对论却认为，光子的短程线方程与有质量的粒子的短程线方程不一样。从短程线方程得到运动方程时，不适当地令其中的一个积分常数为零。这种做法违背黎曼几何的基本原则，由此就导致运动方程互相矛盾的结果。

二 光在太阳引力场中的轨道极点

2.1 光在太阳引力场中的轨道运动方程

在广义相对论的四个实验检验中，有两个是关于光线在太阳引力场中运动的，即光线的偏折和雷达波的延迟实验。广义相对论用施瓦西度规来描述太阳引力场，在短程线方程组中消去任意变分参数，得到两个方程。一个是与时间无关的轨道方程，用来描述恒星发出的光在太阳引力场中偏折，形式如下【2】，【3】：

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{K^2}{J^2} + \alpha u^3 \quad (1)$$

其中 $u = 1/r$ ， K 和 J 是积分常数。将上式微分，得到二阶导数运动方程：

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{3}{2}\alpha u^2 = \frac{3GM}{c^2}u^2 \quad (2)$$

按照（2）式计算，得到光在太阳引力场中的偏折角：

$$\Delta\theta = \frac{2\alpha}{R} = \frac{4GM}{c^2 R} = 1.75'' \quad (3)$$

另外一个是与时间有关的运动方程，用来计算雷达波的时间延迟，形式如下【2】：

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c^2\left[1 - \frac{2\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2} + \frac{\alpha J^2}{K^2 r^3}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2\right] \quad (4)$$

计算结果是：

$$\Delta t = \frac{4GM}{c^3}\left(\ln\frac{4rr'}{R^2} + 1\right) = 2.4 \times 10^{-4} \text{ 秒} \quad (5)$$

由于实际观察与（5）和（6）式的结果一致，广义相对论被认为得到实验证实。

2.2 运动方程常数的确定

广义相对论修正项 αu^3 和 $3\alpha u^2/2$ 不存在时，在（2）、（3）式变成：

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{K^2}{J^2} \quad (6)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0 \quad (7)$$

（7）式的解是：

$$u = \frac{\sin\theta}{D} \quad D = r \sin\theta \quad (8)$$

式中 D 是常数，且有 $D \neq 0$ 。如图 1 所示，（8）式表示光线沿 $y = r \sin\theta = D = \text{常数}$ 的直线运动。在 $x=0$ 点 $\theta = \pi/2$ ， $du/d\theta = \cos\theta/D = 0$ ， $u = 1/D$ 。代入（6）式，得 $K/J = 1/D$ ，常数项由此确定。（1）式变成：

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{D^2} - u^2 + \alpha u^3 = f(u) \quad (9)$$

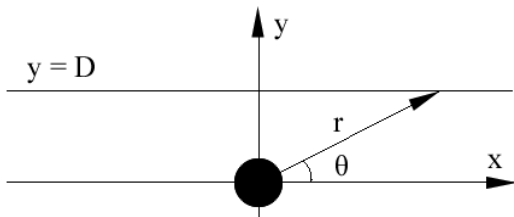


图 1. 广义相对论修正项不存在时光的运动轨道

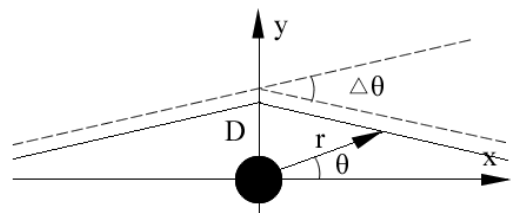


图 2. 光在太阳引力场中的轨道偏折

2.3 光在太阳引力场中的轨道极点

2.3.1 一元三次方程的根

根据一元三次方程理论，（9）式中函数 $f(u) = 0$ 有一个实数根（即轨道极点）和两个共轭的虚根，或者有三个实数根，不可能有两个实数根。按照图 2，远处的光线经过太阳附近时，运动轨道只有一个极点，我们来求这个极点的位置。令 $b = -1/\alpha$ ， $g = 1/(\alpha D^2)$ ，从 $f(u) = f(u_1) = 0$ ，得：

$$u_1^3 - \frac{1}{\alpha}u_1^2 + \frac{1}{\alpha D^2} = u_1^3 + bu_1^2 + g = 0 \quad (10)$$

再令：
$$u_1 = y_1 - \frac{b}{3} \quad (11)$$

(10) 式变成：
$$y_1^3 + py_1 + q = 0 \quad (12)$$

其中：
$$p = -\frac{1}{3}b^2 = -\frac{1}{3\alpha^2} \quad q = \frac{2}{27}b^3 + g = -\frac{1}{\alpha^3} \left(\frac{2}{27} - \frac{\alpha^2}{D^2} \right) \quad (13)$$

就有：
$$y_1 = \left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right]^{1/3} + \left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right]^{1/3} \quad (14)$$

$$y_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right]^{1/3} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right]^{1/3} \quad (15)$$

$$y_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right]^{1/3} + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right]^{1/3} \quad (16)$$

2.3.2 $D > R \gg \alpha$ 时轨道极点位置的近似计算

已知太阳半径是 $R = 6.96 \times 10^8$ 米，太阳引力半径 $\alpha = 2.95 \times 10^3$ 米。对于从远处来的光线，取 $D > R \gg \alpha$ ， $\alpha^2/D^2 \leq 10^{-10} \ll 1$ 。如果忽略 α^2/D^2 项，从 (13) 式得：

$$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt{\frac{1}{27^2\alpha^6} - \frac{1}{9^3\alpha^6}} = 0 \quad (17)$$

将它代入 (14) ~ (16) 式，得：

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{2}{3\alpha} & u_1 &= y_1 - \frac{b}{3} = \frac{1}{\alpha} & r_1 &= \frac{1}{u_1} = \alpha \\ y_2 = y_3 &= -\frac{4}{3\alpha} & u_2 = u_3 &= -\frac{1}{\alpha} & r_2 = r_3 &= -\alpha \end{aligned} \quad (18)$$

因此 (9) 式有三个实根，其中一个是正的，另外两个是负的二重根。事实上，在 (9) 式中忽略 $1/D^2$ 项，从 $f(u) = 0$ 立即可得 $u = \pm 1/\alpha$ 。负根在物理学上没有意义，正根 $r_1 = \alpha$ 表示光线轨道极点在太阳施瓦西半径上。意味着远处恒星发出的光进入太阳系后，都要进入太阳内部消失，不可能被地球人观察到。地球的夜空应当是黑暗的，然而事实不是如此。

2.3.3 $D = R$ 时轨道极点的精确计算

在 $D = R$ ，且 α^2/D^2 不予忽略时，我们来精确讨论 (10) 式的根。已知太阳半径 $R = 6.96 \times 10^8$ 米，

令 $D = R = 2.36\alpha \times 10^5$ 米，从 (13) 式得：

$$q = -\frac{2}{27\alpha^3} \left(1 - \frac{27\alpha^2}{2D^2} \right) = -\frac{2}{27\alpha^3} (1 - \varepsilon_1) \quad (19)$$

其中 $\varepsilon_1 = 2.43 \times 10^{-10}$ 是一个小量。从 (13) 和 (14) 式可得：

$$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{1}{2\alpha D^2} \sqrt{1 - \frac{4D^2}{27\alpha^2}} \quad (20)$$

将 $D = 2.36\alpha \times 10^5$ 代入上式，得：

$$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{\sqrt{1 - 8.25 \times 10^9}}{1.11 \times 10^{11} \alpha^3} = \frac{i\varepsilon_2}{\alpha^3} \quad (21)$$

其中 $\varepsilon_2 = 3.72 \times 10^{-2}$ 。令 $\varepsilon = 27\varepsilon_2$ ，考虑到 $\varepsilon_1 = 2.43 \times 10^{-10} \ll 1$ ，(14) 式就变成：

$$y_1 = \frac{1}{3\alpha} (1 + i\varepsilon)^{1/3} + \frac{1}{3\alpha} (1 - i\varepsilon)^{1/3} \quad (22)$$

上式可以写成：

$$y_1 = \frac{1}{3\alpha} (Qe^{i\varphi/3} + Qe^{-i\varphi/3}) = \frac{2Q \cos(\varphi/3)}{3\alpha} \quad (23)$$

其中：

$$Q = \left(\sqrt{1 + \varepsilon^2} \right)^{1/3} \quad \varphi = \arctg \varepsilon \quad (24)$$

由于 $\varepsilon = 27 \times 3.72 \times 10^{-2} \approx 1.00$ ，就有 $\varphi = 45^\circ$ ，和：

$$Q = 2^{1/6} = 1.12 \quad \cos \varphi/3 = \cos 15^\circ = 0.96 \quad (25)$$

从 (11) 式得：

$$u_1 = \frac{1.12 \times 0.96}{3\alpha} + \frac{1}{3\alpha} = \frac{0.69}{\alpha} \quad r_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{\alpha}{0.69} = 4.28 \times 10^3 \text{ 米} \quad (26)$$

再来计算其他两个根，利用 (20) 和 (23) 式，以及以下公式：

$$\frac{1}{3\alpha} (1 + i\varepsilon)^{1/3} - \frac{1}{3\alpha} (1 - i\varepsilon)^{1/3} = Q(e^{i\varphi/3} - e^{-i\varphi/3}) = 2iQ \sin(\varphi/3) \quad (27)$$

(15) 和 (16) 式变成：

$$y_2 = \frac{(-1 - i\sqrt{3})(1 + i\varepsilon)^{1/3}}{6\alpha} + \frac{(-1 + i\sqrt{3})(1 - i\varepsilon)^{1/3}}{6\alpha} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{6\alpha} \left[(1 + i\varepsilon)^{1/3} + (1 - i\varepsilon)^{1/3} \right] - \frac{i\sqrt{3}}{6\alpha} \left[(1 + i\varepsilon)^{1/3} - (1 - i\varepsilon)^{1/3} \right] \\ &= \frac{-Q \cos(\varphi/3) + \sqrt{3}Q \sin(\varphi/3)}{3\alpha} = -\frac{1.12}{3\alpha} (0.96 - \sqrt{3} \times 0.26) = -\frac{0.19}{\alpha} \end{aligned} \quad (29)$$

$$y_3 = \frac{(-1+i\sqrt{3})(1+i\varepsilon)^{1/3}}{6\alpha} + \frac{(-1-i\sqrt{3})(1-i\varepsilon)^{1/3}}{6\alpha} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{6\alpha} \left[(1+i\varepsilon)^{1/3} + (1-i\varepsilon)^{1/3} \right] + \frac{i\sqrt{3}}{6\alpha} \left[(1+i\varepsilon)^{1/3} - (1-i\varepsilon)^{1/3} \right] \\ &= \frac{-Q \cos(\varphi/3) - \sqrt{3}Q \sin(\varphi/3)}{3\alpha} = -\frac{1.12}{3\alpha} (0.96 + \sqrt{3} \times 0.26) = -\frac{0.51}{\alpha} \end{aligned} \quad (31)$$

就有：

$$u_2 = -\frac{0.19}{\alpha} + \frac{1}{3\alpha} = \frac{0.14}{\alpha} \quad r_2 = \frac{1}{u_2} = \frac{\alpha}{0.14} = 2.11 \times 10^4 \text{ 米} \quad (32)$$

$$u_3 = -\frac{0.51}{\alpha} + \frac{1}{3\alpha} = -\frac{0.18}{\alpha} \quad r_3 = \frac{1}{u_3} = -\frac{\alpha}{0.18} = -1.64 \times 10^4 \text{ 米} \quad (33)$$

在 $D = R = 6.69 \times 10^8$ 米的情况下，函数 $f(u) = 0$ 有三个实根，其中两个正根，一个负根，分别由 (26)，(32) 和 (33) 式表示。

2.3.4 $R \leq D < \infty$ 时函数 $f(u)$ 的极值

在 $D = R$ 时，我们来求函数 $f(u)$ 的极值，从：

$$f'(u) = -2u + 3\alpha u^2 = 0 \quad (34)$$

得到 $f(u)$ 在 $u = 0$ 和 $u = 2/(3\alpha)$ 处有极值，分别是：

$$f(0) = \frac{1}{D^2} = 1.28 \times 10^{-18} > 0 \quad (35)$$

$$f(2/(3\alpha)) = \frac{1}{D^2} - \frac{4}{9\alpha^2} + \frac{8}{27\alpha^2} = 1.28 \times 10^{-18} - 1.70 \times 10^{-8} \approx -1.70 \times 10^{-8} < 0 \quad (36)$$

因此 $f(u)$ 的函数形式与极点位置可以用图 3 来大致地表示（没有按比例）。

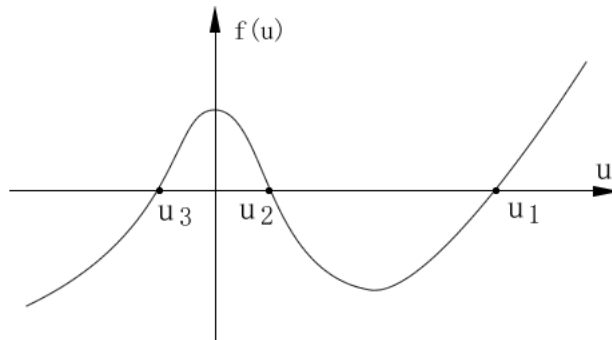


图 3. 广义相对论的光在太阳引力场中运动允许的区域

在图中 $-\infty < u < u_3$ 的区域 $f(u) < 0$ ，运动方程(9)式没有意义。在 $u_3 \leq u < 0$ 的区域 $f(u) \geq 0$ ，但由于 $r < 0$ ，运动方程没有物理意义。在 $u_2 < u < u_1$ 的区域 $f(u) < 0$ ，方程(9)没有意义。在 $0 < u \leq u_2$ 的区域和 $u_1 \leq u < \infty$ 的区域 $f(u) > 0$ ，运动方程有意义，引力场中的光线只能在这两个

区域运动。

在 $u_1 \leq u < \infty$ 的区间 $0 < r < \alpha = 2.95 \times 10^3$ 米，光只能在施瓦西半径之内运动。由于轨道不连续，太阳系外恒星发出的光进不了这个区域。在 $0 \leq u \leq u_2$ 的区间， $2.11 \times 10^4 < r < \infty$ ，太阳系外恒星发出的光可以在这个区域运动。但轨道的极点在 $r_2 = 2.11 \times 10^4$ 米的地方，光线要进入太阳内部被消融，地球的观察家仍然无法观察到。

因此按照广义相对论，光在太阳引力场中的运动情况如图 4 所示。光在 y 轴的初始位置 $D \gg R$ 时，轨道极点在 $r = \alpha$ 附近，光线沿 L_1 曲线运动。初始位置在 $D = R$ ，轨道极点在 $r_2 = 2.11 \times 10^4$ 米处，光线沿 L_2 曲线运动。假设光初始时位于 $R < D < \infty$ 的区间，进入太阳系后轨道极点位于 $2.95 \times 10^3 \text{ m} \leq r \leq 2.11 \times 10^4 \text{ m}$ 的范围内，都落在太阳内部。而且奇怪的是 D 越大，光线初始时在 y 轴方向上离太阳越远，轨道的极点越接近太阳中心。这是违背物理学常识的，只能说明 (9) 式不可能正确描述光在引力场中的运动。

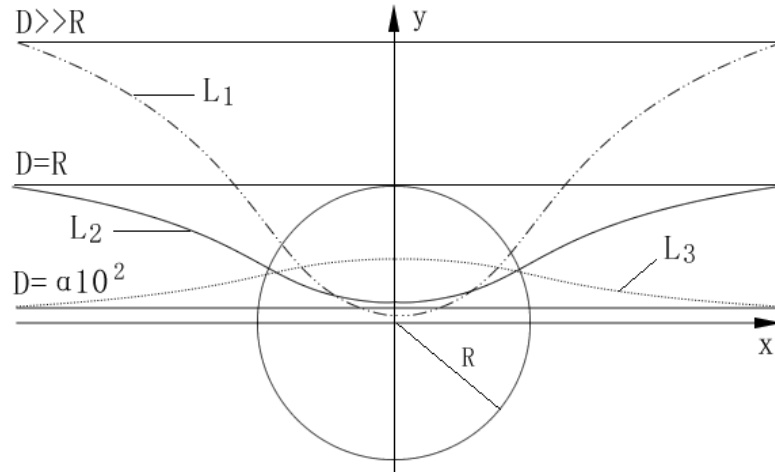


图 4. 广义相对论光在太阳引力场中运动的轨道极点

2.3.5 $D = \alpha \times 10^2$ 时光的轨道极点

如果光的位置的初始条件是 $D = \alpha \times 10^2 = 2.95 \times 10^5$ 米，则 (19) 中 $\varepsilon_1 = 1.35 \times 10^{-3}$ 。(20) 式中的 $\varepsilon_2 = i1.44 \times 10^{-6}$ ，就有 $\varepsilon = 27\varepsilon_2 = i3.89 \times 10^{-5}$ 。从 (23) 和 (24) 式可得：

$$Q = \left[(1 - 1.25 \times 10^{-3})^2 + (3.89 \times 10^{-5})^2 \right]^{\frac{1}{3}} \approx (1 - 2.70 \times 10^{-3})^{\frac{1}{3}} = 1 - 9 \times 10^{-4} \quad (37)$$

以及 $\varphi = 5.02 \times 10^{-3}$ ， $\cos \varphi / 3 \approx 1$ ， $\sin \varphi / 3 \approx 1.67 \times 10^{-3}$ ，与 (23)，(29) 和 (31) 式比较，就有：

$$y_1 = \frac{2(1 - 9 \times 10^{-4})}{3\alpha} \quad u_1 \approx \frac{2}{3\alpha} + \frac{1}{3\alpha} = \frac{1}{\alpha} \quad r_1 = \alpha \quad (38)$$

$$y_2 = \frac{-(1 - 9 \times 10^{-4})}{3\alpha} \quad u_2 = \frac{-(1 - 9 \times 10^{-4})}{3\alpha} + \frac{1}{3\alpha} = \frac{9 \times 10^{-4}}{\alpha}$$

$$r_2 = \frac{\alpha}{9 \times 10^{-4}} = 3.28 \times 10^8 \text{ 米} \quad (39)$$

$$y_3 = \frac{-(1+9 \times 10^{-4})}{3\alpha} \quad u_3 = \frac{-(1+9 \times 10^{-4})}{3\alpha} + \frac{1}{3\alpha} = -\frac{9 \times 10^{-4}}{\alpha} \quad (40)$$

$$r_3 = \frac{\alpha}{9 \times 10^{-4}} = -3.28 \times 10^8 \text{ 米} \quad (41)$$

函数 $f(u) = 0$ 有三个实根，两个正的一个负的。如图 3 所示，作为光的轨道极点只有 r_2 有意义。远处来的光仍然在 $0 < u \leq u_2$ 的区间运动，但轨道极点在 $r_2 \approx R/2$ 的地方，光沿图 4 的 L_3 曲线运动。

2.3.6 $D = \sqrt{27/2}\alpha$ 时光的轨道极点

当初始条件为 $D = \sqrt{27/2}\alpha$ 时，按照 (19) 式 $q = 0$ ，就有：

$$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \left(-\frac{1}{9\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{i}{27\alpha^3} \quad (42)$$

$$y_1 = \left(\frac{i}{27\alpha^3}\right)^{1/3} + \left(-\frac{i}{27\alpha^3}\right)^{1/3} = 0 \quad (43)$$

$$y_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{i}{27\alpha^3}\right)^{1/3} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{i}{27\alpha^3}\right)^{1/3} = -i\sqrt{3} \left(\frac{i}{27\alpha^3}\right)^{1/3} = -\frac{\sqrt{3}}{3\alpha} \quad (44)$$

$$y_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{i}{27\alpha^3}\right)^{1/3} + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{i}{27\alpha^3}\right)^{1/3} = i\sqrt{3} \left(\frac{i}{27\alpha^3}\right)^{1/3} = \frac{\sqrt{3}}{3\alpha} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3\alpha} & r_1 &= 3\alpha = 8.85 \times 10^3 \text{ 米} \\ u_2 &= \frac{1-\sqrt{3}}{3\alpha} & r_2 &= \frac{3\alpha}{1-\sqrt{3}} = -1.21 \times 10^4 \text{ 米} \\ u_3 &= \frac{1+\sqrt{3}}{3\alpha} & r_3 &= \frac{3\alpha}{1+\sqrt{3}} = 3.24 \times 10^3 \text{ 米} \end{aligned} \quad (46)$$

函数 $f(u) = 0$ 有三个实根，其中两个正根，一个负根。我们来求函数 $f(u)$ 的极值，将 $D = \sqrt{27/2}\alpha$ 代入 (35) 和 (36) 式，得：

$$f(0) = \frac{1}{D^2} = \frac{2}{27\alpha^2} = 8.51 \times 10^{-9} \quad (47)$$

$$f(2/(3\alpha)) = \frac{2}{27\alpha^2} - \frac{4}{9\alpha^2} + \frac{8}{27\alpha^2} = -\frac{2}{27\alpha^2} = -8.51 \times 10^9 \quad (48)$$

因此 $f(u)$ 的函数形式与极点位置与图 3 描述的基本一样，只是从横坐标从左到右排列的位置变成 u_2 ， u_1 和 u_3 。光线只能在 $0 < u \leq u_1$ 的区间运动，轨道极点 r_1 在太阳内部，离太阳中心 8.85×10^3 米的地方。

2.3.5 $D = \alpha$ 时光的轨道极点

如果初始时远处的光处于 $D = \alpha$ 的位置，按照 (19) 和 (20) 式，得：

$$q = -\frac{1}{\alpha^3} \left(\frac{2}{27} - 1 \right) = \frac{0.9259}{\alpha^3} \quad \sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3} = \frac{1}{2\alpha^3} \sqrt{1 - \frac{4}{27}} = \frac{0.4615}{\alpha^3} \quad (49)$$

$$y_1 = -\frac{1}{\alpha} (0.4630 - 0.4615)^{1/3} - \frac{1}{\alpha} (0.4630 + 0.4615)^{1/3} = -\frac{1.0887}{\alpha} \quad (50)$$

$$u_1 = -\frac{1.0887}{\alpha} + \frac{1}{3\alpha} = -\frac{0.7554}{\alpha} \quad r_1 = -1.3238\alpha < 0 \quad (51)$$

$$y_2 = \frac{0.1145(-1 - i\sqrt{3})}{2\alpha} + \frac{0.9742(-1 + i\sqrt{3})}{2\alpha} = -\frac{0.5444 - i0.7436}{\alpha} \quad (52)$$

$$y_3 = \frac{0.1145(-1 + i\sqrt{3})}{2\alpha} - \frac{0.9742(1 + i\sqrt{3})}{2} = -\frac{0.5444 + i0.7436}{\alpha} \quad (53)$$

函数 $f(u) = 0$ 有一个负根和两个互为共轭的虚根。对于光的运动，这样的轨道极点不存在。从物理学的角度，运动方程 (9) 式没有意义。然而，光从 $D = \alpha$ 的位置进入太阳是很正常的事，怎么运动方程就变得没有意义了呢？

2.3.6 $D \ll \alpha$ 时光的运动轨道

如果初始时光的处于 $D \ll \alpha$ 的位置，(19) 和 (20) 式变成：

$$q = -\frac{1}{\alpha^3} \left(\frac{2}{27} - \frac{\alpha^2}{D^2} \right) = \frac{1}{\alpha D^2} \quad \sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3} \approx \frac{1}{2\alpha D^2} \quad (54)$$

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3} = 0 \quad -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3} = -\frac{1}{\alpha D^2} \quad (55)$$

$$y_1 = -\left(\frac{1}{\alpha D^2} \right)^{1/3} \quad u_1 = -\left(\frac{1}{\alpha D^2} \right)^{1/3} + \frac{1}{3\alpha} \approx -\left(\frac{1}{\alpha D^2} \right)^{1/3} < 0 \quad (56)$$

$$y_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\alpha D^2} \right)^{1/3} \quad y_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\alpha D^2} \right)^{1/3} \quad (57)$$

函数 $f(u) = 0$ 有一个负的实根，和两个互为共轭的复根。这样的轨道运动是没有物理意义的，因此对于 $D \ll \alpha$ 的情况，运动方程 (9) 式也不能描述光的运动。

2.3.6 光在太阳引力场中的折射

对于初始位置 D 等于太阳半径的光，轨道极点在 $r_2 = 2.11 \times 10^4$ 米处，(3) 式变成：

$$\Delta\theta = \frac{4GM}{c^2 r_2} = \frac{4GM}{c^2 R} \frac{R}{r_2} = 1.75'' \times 3.3 \times 10^4 \quad (58)$$

是广义相对论计算结果的 33000 倍，与实际观察就完全不符。现有广义相对论对光线的偏折的计算是错误的，光在太阳引力场中的偏折实验并没有证明广义相对论成立。

三 广义相对论光的轨道方程及其解存在的问题

3.1 光的轨道运动方程存在的问题

按照一般的理解，广义相对论是对牛顿引力理论的修正。(1)和(2)式等号右边的项 αu^3 和 $3\alpha u^2/2$ 是广义相对论的修正项，在弱引力场中它们是小项。将它们忽略，就得到牛顿引力的结果。我们以下指出，(2)式是与牛顿引力理论完全不一样的方程。

对于有质量的物体在球对称引力场中的运动，与(2)式对应的牛顿引力轨道方程是：

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{L^2} \quad (59)$$

(59)式描述二次圆锥曲线轨道，方程右边的 GM/L^2 是常数。但(2)式右边的 $3\alpha u^2/2$ 不是常数，因此(2)式是与(59)式不同类型的方程，它描述的即不是二次圆锥曲线轨道，也不是圆锥曲线的牛顿近似。将二者进行比较，有：

$$\frac{GM}{L^2} \sim \frac{3GM}{c^2 r^2} \quad (60)$$

相当于令 $L = Vr \sim cr$ 。在弱引力场中，对于有质量的物体 $V \ll c$ ，与(59)式相比，(2)式等号右边的项可以看成是小项。然而对于弱引力场中光的运动， $V \sim c$ ，该项就不能看成小项。当 r 很大时 $3\alpha u^2/2$ 很快就趋于零，当 r 很小时这一项会变得很大。然而(60)式右边的项是不变量。因此，(2)式与牛顿引力完全不一样的运动方程。用它描述光在太阳引力场中的运动，就会导致重大的错误。

3.2 广义相对论对光的轨道偏折计算存在的问题

按照广义相对论的计算，修正项 αu^2 项不存在时，在(7)式中令 $u = u_0$ ，有：

$$\frac{d^2u_0}{d\theta^2} + u_0 = 0 \quad (61)$$

其解为：

$$u_0 = \frac{\sin\theta}{D} \quad D = r_0 \sin\theta \quad (62)$$

将(62)式代入(1)式右边，并令 $u = u_1$ ，得到一阶近似方程：

$$\frac{d^2u_1}{d\theta^2} + u_1 = \frac{3\alpha}{2} u_0^2 = \frac{3\alpha}{2D^2} \sin^2\theta \quad (63)$$

上式的特解是：

$$u_1 = \frac{\alpha}{2D^2} (1 + \cos^2\theta) \quad (64)$$

因此(2)式的解为：

$$u = u_0 + u_1 = \frac{\sin\theta}{D} + \frac{\alpha}{2D^2}(1 + \cos^2\theta) \quad (65)$$

令 $r \rightarrow \infty$, $u = 1/r = 0$, 得:

$$\sin\theta + \frac{\alpha}{2D}(1 + \cos^2\theta) = 0 \quad (66)$$

令 $\theta = \pi + \delta$, δ 是一个小量, $\sin\theta = -\sin\delta \approx -\delta$, $\cos^2\theta \approx 1$, 代入 (25) 式得 $\delta = \alpha/D$ 。远处恒星发出的光太阳表面略过 $D=R$ 时, 就得到 (3) 式。

3.3 广义相对论计算存在的问题

以上计算出了几何图像不清, 方程的解实际上存在严重的问题。

1. 如图 1 所示, 对于位于直线上的点, 关系 $y = r \sin\theta = D$ 成立。对于光在引力场中运动轨迹上的点, $y = r \sin\theta$ 也总是成立, 但关系 $y = D$ 不成立 (除了光的出发点)。将 $u = 1/r$ 代入 (65) 式, 得到:

$$y = D - \frac{\alpha}{2D^2} r(1 + \cos^2\theta) \quad (67)$$

上式又可以改写成:

$$r = \frac{D}{\sin\theta - \alpha(1 + \cos^2\theta)/(2D^2)} = \frac{D}{\sin\theta} \quad (68)$$

然而 (68) 式的第二个等号不可能成立, 除非 $\alpha = 0$ 或 $M = 0$, 表示太阳不存在, 因此 (65) 式的解没有意义。

2. 事实上, 按照 (67) 式, 对于图 1 左边无穷处的天体, $r \rightarrow \infty$ 时 $\theta = \pi$, 就有:

$$y = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(D - \frac{\alpha}{D^2} r \right) \rightarrow -\infty \quad (69)$$

对于图 1 右边无穷处的观察者, 则有 $r \rightarrow \infty$ 和 $\theta = 0$, 同样有 $y \rightarrow -\infty$ 。总的结果是, 位于 $(-\infty, -\infty)$ 处的天体发出的光绕过太阳表面到达 $(\infty, -\infty)$ 处的观察者, 光线的偏转角度是 180 度, 而不是 (3) 式的值, 足见 (66) 式的荒谬性。

3. 产生这种结果的原因有两个。

I) 如前所述, 运动方程 (2) 式的广义相对论修正项不是小量, 不可能按 (63) 式做近似计算。

II) 可以证明 (2) 式的解不可能写成 (65) 式的形式。将 $u = u_0 + u_1$ 代入 (2) 式, 得:

$$\frac{d^2 u_0}{d\theta^2} + u_0 + \frac{d^2 u_1}{d\theta^2} + u_1 = \frac{3\alpha}{2}(u_0^2 + 2u_0 u_1 + u_1^2) \quad (70)$$

考虑 (61) 式, 得:

$$\frac{d^2 u_1}{d\theta^2} + u_1 = \frac{3\alpha}{2}(u_0^2 + 2u_0 u_1 + u_1^2) \quad (72)$$

考虑 (73) 式, 就有 $2u_0 u_1 + u_1^2 = 0$, 或 $u_1 = -2u_0$ 。因此就有:

$$u = u_0 + u_1 = -u_0 \quad (71)$$

代入 (2) 式, 得:

$$\frac{d^2 u_0}{d\theta^2} + u_0 = -\frac{3\alpha}{2} u_0^2 \quad (73)$$

然而 (73) 式与 (61) 式相互矛盾, 除非令 $u_0 = 0$, 得 $u = 0$ 。也就是说, 如果运动方程 (2) 式的解具有 $u = u_0 + u_1$ 的形式, 同时又要满足 (61) 式, 则该方程没有非零解。

4. 物理学采用近似方法做计算是很正常的事情, 但计算结果必须是唯一的, 不能有矛盾。产生这个矛盾的原因在于, 运动方程 (2) 式是非线性的。(65) 式是两个特解的线性叠加, 然而数学上可知, 解的线性叠加只对线性方程有效, 对非线性方程无效。因此 (65) 式不可能是 (2) 式的解, 广义相对论的近似计算方法是不成立的。对于光在太阳引力场中的偏折问题, 广义相对论的预言纯属歪打正中。

关于光线在引力场中的偏折, 广义相对论还有其他一些计算方法【4】, 【5】。这些计算方法都无例外地把光的轨道极点放在太阳表面, 因而都是不可能的。限于篇幅, 本文就不讨论。

四 光的广义相对论运动方程的牛顿近似

4.1 光在太阳引力场中与时间有关的运动方程

光在太阳系引力场中与时间有关的运动方程是【1】, 【5】:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = c^2 \left[1 - \frac{2\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2} + \frac{\alpha J^2}{K^2 r^3} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2\right] \quad (74)$$

令 $cJ = L$, 可将上式改写成牛顿引力理论的能量守恒形式:

$$\frac{1}{2} m_0 \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] + \frac{2GMm_0}{r} \left[1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2K^2 c^2 r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} m_0 c^2 \quad (75)$$

其中 $m_0 c^2 / 2 = h\nu$ 可以看成是光子在引力场外真空中的能量, 对应的静止质量 $m_0 = 2h\nu / c^2$ 。将 (75) 式与牛顿引力理论比较, 可以得到以下结论:

1. 广义相对论的修正等价于将光子的引力质量用以下式表示:

$$m_g = m_0 \left[1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2K^2 c^2 r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2 \right] \quad (76)$$

2. 当 $r > \alpha$ 时光子在引力场中的引力势能是正值, 意味着光子实际上受排斥力的作用。

3. 在弱引力场中, 光子受到的排斥力的主要部分仍然与 $1/r^2$ 成正比, 修正值很小。

4. 由于总能量为正, 光子在弱引力场中的牛顿运动轨道是双曲线。

以上四点与 (2) 式的结果不一样, 说明广义相对论的光在引力场中的两个运动方程互相矛盾。

当光子沿矢径方向进入太阳引力场时, $L = 0$, (75) 式变成:

$$\frac{1}{2} m_0 \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] + \frac{2GMm_0}{r} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) = \frac{1}{2} m_0 c^2 \quad (77)$$

当光沿太阳表面的切线方向运动时, 在极点上 $L = VR$, 就有:

$$\frac{1}{2}m_0\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \frac{2GMm_0}{r}\left[1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{V^2R^2}{2K^2r^2}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2\right] = \frac{1}{2}m_0c^2 \quad (78)$$

考虑到 $\alpha/r \ll 1$ ，并令 $K^2 = 1$ ，在太阳表面上附近 $r \approx R$ ， $V \approx c$ ，(75) 式就变成：

$$\frac{1}{2}m_0\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \frac{GMm_0}{r} = \frac{1}{2}m_0c^2 \quad (79)$$

光子的引力质量与惯性质量变成一样，光在引力场中受排斥力的作用，做双曲线轨道运动。

这种结果与现有广义相对论的看法是相悖的，尤其是光子在引力场中受排斥力的作用，与引力的概念是完全不一样的。当光子沿矢径方向进入太阳引力场时，从 (75) 式可以得到光子的速度：

$$V = c\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{r}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} \approx c\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \quad (80)$$

加速度则为 ($\alpha/r < 1$):

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{c\alpha V}{r} > 0 \quad (81)$$

由此进一步证明光子在引力场中是受排斥力的作用。

4.2 有质量的粒子在牛顿有心引力场中的运动

(79) 式表示光子在引力场中受排斥力的作用，为了得到光子按 (79) 式运动的轨迹，我们先讨论静止质量为 m_0 的粒子在引力作用下沿双曲线轨道运动的情况。牛顿力学引力公式为

$$m_0(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F = -\frac{GMm_0}{r^2} \quad m_0(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (82)$$

将 (82) 式的右式积分，得 $r^2\dot{\theta} = h = \text{常数}$ 。令 $u = 1/r$ ，可以将它转化成比尼公式【4】：

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \quad (83)$$

其解为：

$$u = \frac{GM}{h^2} + A\cos\theta \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \quad (84)$$

其中 p 是半正焦弦， e 偏心率，定义为：

$$p = \frac{h^2}{GM} \quad e = Ap = \frac{Ah^2}{GM} \quad (85)$$

偏心率 $e < 0$ 时，(83) 式描述椭圆轨道，如图 5 示。设椭圆轨道的长半轴是 b ，在近日点 $\theta = 0$ ， $r = b(1 - e)$ ，在远日点 $\theta = \pi$ ， $r = b(1 + e)$ ，按照 (85) 和 (86) 式，得：

$$p = b(1 - e^2) \quad h^2 = GMb(1 - e^2) \quad (86)$$

能量守恒方程是：

$$\frac{1}{2}m_0(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm_0}{r} = E \quad (87)$$

将近日点的值 $r=b(1-e)$, $\dot{r}=0$ 和 $r^2\dot{\theta}=h$ 代入上式, 得:

$$E = \frac{m_0 h^2}{2b^2(1-e)^2} - \frac{GMm_0}{b(1-e)} = -\frac{GMm_0}{2b} < 0 \quad (88)$$

椭圆运动的粒子的总能量小于零。

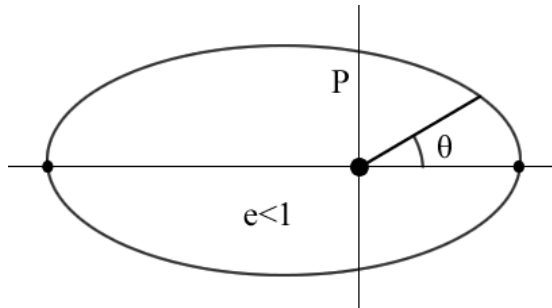


图 5. 粒子在牛顿引力场中的椭圆轨道

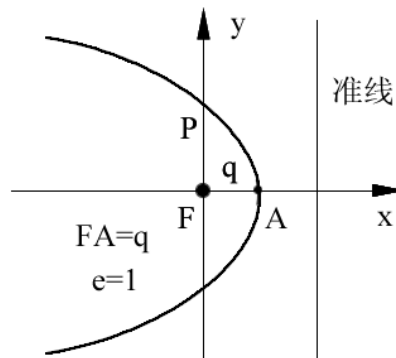


图 6. 粒子在牛顿引力场中的抛物线轨道

偏心率 $e=1$ 时的轨道是抛物线, 如图 6 所示。在近日点 $\dot{r}=0$, $r=q$, 则有 $p=2q$, $h^2=GM2q$, 代入 (88) 式, 可得粒子的总能量为零:

$$E = \frac{m_0 h^2}{2q^2} - \frac{GMm_0}{q} = 0 \quad (89)$$

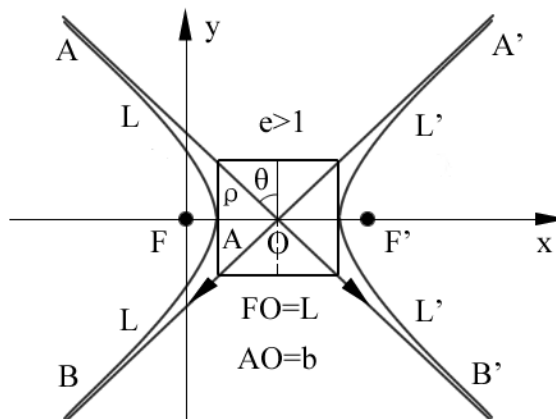


图 7. 粒子在牛顿引力场中的双曲线轨道

偏心率 $e > 1$ 时的轨道是双曲线，如图 7 所示，此时有：

$$p = b(e^2 - 1) \quad h^2 = GMb(e^2 - 1) \quad (90)$$

在近日点 $\dot{r} = 0$ ， $r = b(e-1)$ ，代入 (89) 式，可得粒子的总能量大于零：

$$E = \frac{m_0 h^2}{2b^2(e-1)^2} - \frac{GMm_0}{b(e-1)} = + \frac{GMm_0}{2b} > 0 \quad (91)$$

假设光子等价的静止质量为 m_0 ，引力质量与静止质量等价。在 $r \rightarrow \infty$ 的真空中速度 $V = c$ ，能量 $E = h\nu$ ，的动能为 $m_0 V^2 / 2 = m_0 c^2 / 2 = h\nu$ ，则光子的等价静止质量为 $m_0 = 2h\nu / c^2$ 。假设光子也按牛顿理论的方式运动，运动方程及其解也用 (82) ~ (84) 式描述，能量守恒方程变成：

$$\frac{1}{2} m_0 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{GMm_0}{r} = \frac{1}{2} m_0 c^2 \quad (92)$$

由于 $E > 0$ ，光子在引力场中的运动轨道是双曲线。同样有 $r^2 \dot{\theta} = h^2 = GMb(e^2 - 1)$ ，在近日点 $\dot{r} = 0$ ， $r = b(e-1)$ ，代入 (92) 式，得：

$$\frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} = \frac{GMb(e^2 - 1)}{b^2(e-1)^2} - \frac{2GM}{b(e-1)} = m_0 c^2 \quad (93)$$

从上式得：

$$b = \frac{GM}{c^2} = \frac{\alpha}{2} \quad (94)$$

另一方面，按照圆锥曲线理论，双曲线方程可写为：

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{\rho^2} = 1 \quad (95)$$

如图 7 所示，从图左边 A 方向来的光线在引力作用下沿曲线 L 运动，被偏折到 B 方向。在 B 方向的观察者看来，光线来自 A' 方向。双曲线的实半轴是 b ，虚半轴是 ρ ，焦距为 $2L$ ，有：

$$L = \sqrt{b^2 + \rho^2} \quad e = L/b > 1 \quad (96)$$

对于光线从太阳表面略过的情况， $L = R + b$ ， R 是太阳半径，就有：

$$L^2 = (b + R)^2 = b^2 + \rho^2 \quad \rho = \sqrt{R^2 + 2bR} = R\sqrt{1 + 2b/R} \quad (97)$$

从图 7 可知：

$$\text{tg} \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{R\sqrt{1 + 2b/R}} \quad (98)$$

按照 (94) 式， $2b = \alpha \ll R$ ，得：

$$\text{tg} \theta \approx \theta \approx \frac{b}{R} \quad (99)$$

从无穷远处来的光线的偏折角为：

$$\Delta \theta = 2\theta = \frac{2b}{R} = \frac{2GM}{c^2 R} \quad (100)$$

此偏折角是广义相对论计算结果的一半，德国慕尼黑天文台的索德纳 1804 年最早得到这个结果，预言了光线经过太阳边缘时会发生 0.875 角秒的偏折【6】。但由于十八世纪和十九世纪光的波动说占据上风，索德纳的预言没有被认真对待。

如果假设光子的引力质量是惯性质量的两倍，按照牛顿引力理论，也能得到与（3）式相同的结果，这已经是众所周知的。在这种情况下，光子在引力场中沿双曲线运动，不需要弯曲时空的概念。

4.3 光在太阳引力场运动轨道的偏折

如果光线在引力场中受排斥力作用，情况就不一样。此时光子受力为：

$$\vec{F} = \frac{GMm_0\vec{r}}{r^3} \quad F = \frac{GMm_0}{r^2} \quad (101)$$

令 $u = 1/r$ ，运动方程（43）式变成：

$$h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -GM \dot{u} \quad \text{或} \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{GM}{h^2} \quad (102)$$

（102）式的解是：

$$r = \frac{p}{e \cos \theta - 1} \quad e = Ap = \frac{Ah^2}{GM} \quad (103)$$

（103）式与（84）式有所不同。为了求出近日点，将上式对 θ 求导，近日点条件为：

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-p \sin \theta}{(e \cos \theta - 1)^2} = 0 \quad (104)$$

近日点的角度 $\theta = 0$ ，就有 $r = b(e-1) = p/(e-1)$ ，得 $p = b(e-1)^2$ ，从而有：

$$p = \frac{h^2}{GM} = b(e-1)^2 \quad h^2 = GMb(e-1)^2 \quad (105)$$

（105）式与（90）式也有所不同，光子在引力场中的能量守恒方程变成：

$$m_0(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{2GMm_0}{r} = m_0 c^2 \quad (106)$$

在近日点， $r = b(e-1)$ ， $\dot{r} = 0$ ，从上式得：

$$\frac{h^2}{r^2} + \frac{2GM}{r} = \frac{GMb(e-1)^2}{b^2(e-1)^2} + \frac{GM}{b(e-1)} = m_0 c^2 \quad (107)$$

得：

$$b = \frac{GM(e+1)}{c^2(e-1)} \quad (108)$$

代入（100）式，得：

$$\Delta\theta = 2\theta = \frac{2b}{R} = \frac{2GM}{c^2 R(e-1)} (e+1) \quad (109)$$

对于光的运动，双曲线的偏心率 $e \gg 1$ ，上式约等于（4）式的一半。

除此之外，由于光受排斥力的作用，偏折的方向与引力的情况是相反的。如图 5 所示，从图右边 A' 方向来的光线在排斥力的作用下沿曲线 L' 运动，被偏折到 B' 方向。在 B' 方向上的观察者看来，光线来自 A 方向。显然这样的结果与实际过程不一致。也就是说按照广义相对论，光在引力场中受排斥力的作用，光线的弯曲方向与目前的广义相对论计算方向是相反。即使按照 (3) 式的数值，广义相对论仍然无法解释光线在太阳引力场的偏折。

五 广义相对论雷达波延迟计算存在的问题

5.1 广义相对论关于雷达波时间延迟的计算

欧文·夏皮罗 1964 年提出雷达波在引力场中的时间延迟实验，被看成支持广义相对论的四个基本实验之一。按照广义相对论的计算，雷达波在地球和水星之间传播时，时间延迟的计算公式用 (5) 式表示。假定雷达波从太阳表面掠过，可得 $\Delta t \approx 2.39 \times 10^{-4}$ 秒。

1967 年 4 月和 8 月水星两次上合期间，美国林肯实验室首次得到实验与理论一致的结果，雷达波在地球和水星之间往返的时间延迟了约 200 微秒【5】。其后在地球和金星之间的实验显示，时间延迟与广义相对论的计算一致。1976 年的海盗号火星探测器将精度提高到了 0.1%，2003 年卡西尼号土星探测器的实验误差则小于 0.002%，被认为是迄今为止精度最高的广义相对论实验验证。以下证明 (7) 式的计算结果是有问题的，按照正确的计算误差达到 14.9%，因此不能认为广义相对论关于雷达波时间延迟的预言已经被实验证实。

按照广义相对论，光在引力场中的运动方程是 (31) 式，将它改写为【5】：

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-3} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \quad (110)$$

广义相对论的计算假设光从太阳表面掠过，太阳半径为 R 。 $r = R$ 时 $dr/dt = 0$ ，代入上式得：

$$L^2 = R^2 c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)^{-1} \quad (111)$$

将上式代入 (110) 式，考虑到 $\alpha/r \ll 1$ ，忽略 α^2/r^2 的小项，得【4】、【5】：

$$c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \frac{c^2 R^2}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \quad (112)$$

$$cdt = \frac{dr}{1 - \frac{\alpha}{r}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{1 - \alpha/r}{1 - \alpha/R}}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - R^2/r^2}} \left(1 + \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha R}{2r(r+R)}\right) \quad (113)$$

$$ct = \sqrt{r^2 - R^2} + \alpha \ln \frac{\sqrt{r^2 - R^2} + r}{R} + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{r-R}{r+R}} \quad (114)$$

考虑雷达波在水星和地球之间传播，对于地球 $r_e = 1.50 \times 10^{11}$ 米，对于水星 $r_p = 5.55 \times 10^{10}$ 米，太阳半径 $R = 6.96 \times 10^8$ 米。得到时间延迟为：

$$\Delta t \approx \frac{2\alpha}{c} \left(\ln \frac{4r_e r_p}{R^2} + 1 \right) = 2.39 \times 10^{-4} \text{ 秒} \quad (115)$$

5.2 广义相对论的正确计算

以上计算假设光的运动轨道极点位于太阳表面。然而前文已经证明，这不可能的。按照 (32) 式，光的轨道极点在离太阳中心约 $r_2 = 2.11 \times 10^4$ 米，在 (115) 式中用 r_2 ，代替 R ，得：

$$\Delta t \approx \frac{2\alpha}{c} \left(\ln \frac{4r_e r_p}{r_2^2} + 1 \right) = 6.21 \times 10^{-4} \text{ 秒} \quad (116)$$

是 (5) 式的 2.58 倍。更重要的是雷达波进入太阳内部，实际上不可测量。

5.3 两运动方程的不一致性

如前文所述，广义相对论的光在引力场中的运动方程有两个。一个与时间无关的轨道方程，另外一个是与时间有关的运动方程：

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{3}{2} \alpha u^2 \quad (117)$$

$$\frac{1}{2} m_0 \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{2GMm_0}{r} \left[1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2K^2 c^2 r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} m_0 c^2 \quad (118)$$

与牛顿引力理论比较，(118) 式描述的是双曲线运动。差别在于光子受排斥力的作用，引力质量用 (76) 式表示。在太阳系弱引力场中，(107) 式可以简化成：

$$\frac{1}{2} m_0 \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{GMm_0}{r} = \frac{1}{2} m_0 c^2 \quad (119)$$

除了光子受排斥力作用外，上式与牛顿引力理论完全一样。因此 (118) 式可以看成是牛顿引力理论的高阶修正。

然而 (117) 式是关于 u 的非线性方程，与牛顿引力理论的 (83) 式完全不一样。因此 (117) 式不是牛顿引力理论的高阶修正，它与 (118) 式是不一致的。在雷达波的时间延迟问题上，二者的差别可以看得很清楚。

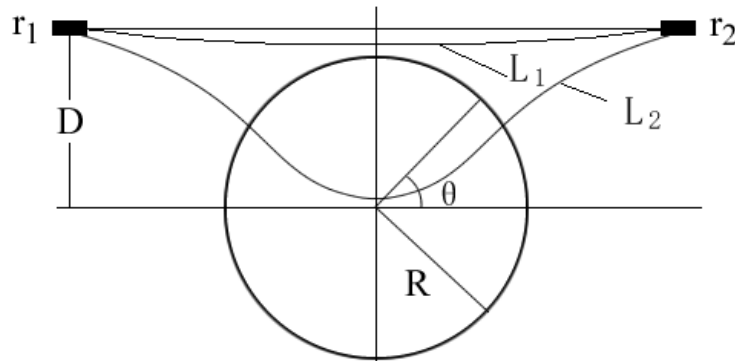


图 8. 太阳引力场中的雷达波时间延迟

如图 8 所示，假设有两个雷达波发射器（探测器），分别位于太阳表面附近的 r_1 和 r_2 点。如果太阳不存在，雷达波沿图中的横直线运动。如果太阳存在，按照 (119) 式，雷达波沿图中的双曲线 L_1 运动，双曲线 L_1 与直线实际上是非常靠近的。

如果用 (117) 式计算，如图 8 的 L_2 曲线所示，光子要进入太阳内部中心附近。光子的运动轨迹不是双曲线， L_2 与 L_1 的差别是巨大的。因此对于广义相对论的光在引力场中的运动，方程 (117) 和 (118) 式是非常不一致的。我们来分析产生这种不一致的原因。

5.4 两个运动方程不一致的原因

广义相对论用弯曲时空代表引力的作用，并用黎曼时空中的短程线来描述引力场中粒子的运动。黎曼几何空间中两点之间的短程线是唯一的，与什么粒子在运动无关。也就是说按照黎曼几何，不论粒子的质量大小，它们都沿相同的短程线运动。

广义相对论中，施瓦西度规被用来描述太阳引力场。通过求解爱因斯坦引力场方程，在得到的短程线方程组中消去任意变分参数，得到的两个以下短程线方程【5】：

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GME}{L^2} + \frac{3\alpha}{2}u^2 \quad (120)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= c^2\left(1 - \frac{E}{K^2}\right) + \left(\frac{3E}{K^2} - 2\right)\frac{2GM}{r} \\ &+ c^2\left(1 - \frac{3E}{K^2}\right)\frac{\alpha^2}{r^2} + \frac{\alpha c^2 J^2}{K^2 r^3}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \frac{E}{K^2}\frac{\alpha^3}{r^3} \end{aligned} \quad (121)$$

将 (121) 式与牛顿引力理论的能量守恒式比较，引力势能项 α/r 项前的系数只能等于 1，即 $3E/K^2 - 2 = 1$ ，或 $E/K^2 = 1$ 。将 (120) 式与牛顿力学的 (59) 式比较，得 $E = 1$ ，则有 $K^2 = 1$ 。

(120) 和 (121) 式变成：

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{L^2} + \frac{3\alpha}{2}u^2 \quad (122)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2GM}{r} + \frac{2c\alpha^2}{r^2} + \frac{\alpha L^2}{r^3}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2 \quad (123)$$

(123) 式等号右边没有常数项，它的牛顿近似描述抛物线轨道。由于 (122) 式的牛顿近似也可以描述抛物线轨道，因此 (122) 式和 (123) 式在物理和数学上是相容的。对于有质量的粒子或太阳系中的行星运动，广义相对论的问题在于，(123) 式的牛顿近似只能描述抛物线轨道，不可能描述椭圆和双曲线轨道。

按照黎曼几何，短程线方程与粒子的质量无关，光子的短程线方程也应当用 (122) 和 (123) 式表示。然而广义相对论却不遵守这个规则，在短程线方程 (120) 和 (121) 式中令 $E = 0$ ，而不是 $E = 1$ ，得到 (117) 和 (118) 式，并用它们来描述光的运动。因此 (117) 式不再是双曲线方程的高阶修正，但 (118) 式仍是双曲线方程的高阶修正。由此就产生矛盾，使图 5 中光的两条运动曲线 L_1 和 L_2 变得完全不一样。

严格按照黎曼几何，光在太阳引力场中也应当用 (122) 和 (123) 式描述。问题是 (123) 式描

述的是类抛物线的轨道，用它来计算既无法得到光在引力场中的偏折值（3）式，也无法得到雷达波的时间延迟结果（5）式。因此我们只能说，广义相对论并没有真正解释光在引力场中的运动。

参考文献

1. 梅晓春，俞平，计算机数值方法证明广义相对论的行星运动理论不成立，前沿科学，2016，2，p. 75 ~ 95.
2. 冯麟保，刘雪成，刘明成，广义相对论，吉林科学出版社，1995, p. 115.
3. 俞允强，广义相对论引论（第二版）北京大学出版社，1997，p. 100.
4. 刘辽，赵峥，广义相对论，第二版，高等教育出版社，2004，p. 157.
5. S. 温伯格，引力论和宇宙论，科学出版社，1984，p. 212, 228.
6. Jean Surdej & Jean-François Claeskens, Gravitational lensing, The Century of Space Science, p. 441-469, Kluwer Academic Publishers, 2001. p. 442.