

半径有限薄圆盘引力场的精确数值 计算方法与银河系的旋转曲线

—— 漩涡星系不需要非重子暗物质的假设

梅晓春⁽¹⁾ 俞平⁽²⁾ 徐宽⁽³⁾

(1) 福州原创物理研究所, 福州, 中国

(2) Cognitech Calculation Technology Institute, USA

(3) 清华大学核能研究院, 北京, 中国

内容摘要 本文采用计算机数值计算方法(简称为半径有限盘方法),证明半径有限物质薄圆盘均匀分布引力场的旋转曲线是自然向上弯曲的,并在边界处达到极大。采用同样的方法,证明在一般的情况下漩涡星系的旋转曲线完全可以是平坦的或向上弯曲的。同时给出半径无限薄圆盘的,密度指数衰减加截断的计算机数值模拟计算方法(简称为半径无限盘方法)。将两种方法进行比较,还得到以下结果:1. 对于半径有限和无限薄圆盘,旋转曲线的形状对密度指数衰减系数都很敏感。衰减系数较小时,旋转曲线都是平坦甚至向上弯的。只有在衰减系数较大时旋转曲线才是向下弯的。2. 为了维持平坦或向上弯的旋转曲线,必须采用较小的衰减指数。在这种情况下采用半径无限盘方法计算,截断半径以外的区域仍然存在较多的质量,计算结果误差太大。3. 为减少误差必须采用较小的衰减指数,结果使旋转曲线向下弯曲,于是就不得不引入球状分布的暗物质晕状分布来提高旋转曲线。4. 采用半径有限盘数值计算方法,没有半径无限加截断方法存在的这种问题。只要假设星系盘中存在的重子暗物质(中性氢和氢分子等不发光气体),其质量不多于发光盘内恒星质量的五倍,就能很好解释银河系旋转曲线的平坦性。我们即不需要修改牛顿引力理论,也不需要漩涡星系中存在大量非重子暗物质的假设,虽然也不排除它们的存在。

一 前言

半径有限物质圆盘分布引力场的形式比较复杂,没有简单直观的计算方法。目前天体力学中常用质量球对称分布代替盘状分布,近似地估计漩涡星系的旋转曲线。按牛顿引力理论,中心质量球对称性分布,且物体在球外绕球心稳定旋转时,物体运动速度 V 与其到球心的距离 r 满足以下关系:

$$F = \frac{V^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \quad \text{或} \quad V = \sqrt{rF} = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (1)$$

对于质量 $M = 2 \times 10^{41} \text{ kg}$ 的星系,假设物质均匀分布在半径 5.37 kpc 的球内,按(1)式计算得到图1中 L_1 所示的旋转曲线。在球半径以内曲线上升,在球半径以外曲线下降。然而对漩涡星系中星体光谱多普勒频移的观察结果发现(Roberts M. Rots A., 1973),在相当大的范围内星体运动速度与其离星系中心的距离无关,大致呈现 $V \approx \text{常数}$ 的关系【1】。也就是说一般漩涡星系的旋转曲线大体上都是平坦的或向上弯曲的,(1)式显然无法解释这样的旋转曲线。

对于物质非均匀分布的盘引力场,至今没有严格的数学解。目前的天体力学中,我们先将漩涡

星系看成一个边界无限的薄圆盘，求出盘的引力势，然后通过微分计算求引力和旋转曲线【2】。由于星系的半径都是有限的，就需要引入截断方法，在半径超过某个值以外的空间中令物质密度为零。然而为了减小误差，就必须对盘内物质分布形式进行限制。结果导致旋转曲线下降，仍然无法解释漩涡星系平坦的旋转曲线。于是就需要引入球状分布的暗物质晕，导致漩涡星系存在大量非暗物质的假设【3】。然而几十年来，物理学家始终无法找到这种物质。

本文提出边界有限物质盘状分布引力场的计算机数值计算方法，经典直观地证明，半径有限物质薄圆盘均匀分布引力场的旋转曲线是自然向上弯曲的，并在边界处达到极大。在其他物质非均匀分布的情况下，漩涡星系的旋转曲线实际上也可以是平坦的或向上弯曲的。只要假定漩涡星系中盘状分布的重子暗物质不多于是发光物质的 5 倍，就可以很好解释旋转曲线的平坦性。因此即不需要修改牛顿引力，也不需要假设漩涡星系中存在大量非重子暗物质，虽然也不排除它们的存在。本文的主要结论如下：

1. 对于半径有限的物质密度均匀分布薄圆盘，旋转曲线是向上弯曲的，且在边界上达到极大（无限大），与我们目前的想象完全不一样。

2. 对于物质密度指数衰减的情况，半径有限和半径无限薄圆盘旋转曲线的形状对衰减系数很敏感。衰减系数较小时旋转曲线可以是平坦的甚至向上弯的，只有在衰减系数较大时，旋转曲线才是向下弯的。

3. 为了维持平坦或向上弯的旋转曲线，就要采用较小的指数衰减系数（包含发光物质和不发光暗物质）。在这种情况下采用半径无限盘方法计算，截断半径以外的区域仍然存在较多的质量，计算结果误差太大。

4. 为减少误差必须采用较小的衰减指数，结果是旋转曲线向下弯曲，于是就不得不引入球状分布的晕状分布暗物质来提高旋转曲线。

5. 采用半径有限盘数值计算方法，就没有这种问题。我们只要假设星系盘中存在重子暗物质（中性氢和氢分子等不发光气体），其质量不多于发光盘内恒星质量的 5 倍，就能很好解释银河系旋转曲线的平坦性。

6. 因此对于漩涡星系，不论非重子暗物质是否存在，都应当采用半径有限盘的方法计算旋转曲线和质量。我们即不需要修改牛顿引力理论，也可以不需要存在非重子暗物质的假设。

二 半径有限密度均匀薄圆盘的引力场和旋转曲线

2.1 半径有限密度均匀圆盘的引力场：

设均匀盘的密度为 σ ，半径为 ρ ，在任意空间点 x, y, z ，可以求得引力势为【4】【5】：

$$V(R, r) = 2G\sigma \left\{ z \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(\rho - r) \right] - \sqrt{R^2 + \rho^2 + 2r\rho} E(k) - \frac{\rho^2 - r^2}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + 2r\rho}} K(k) - \frac{(\rho - r)z^2}{(\rho + r)\sqrt{R^2 + \rho^2 + 2r\rho}} \Pi(\alpha^2, k) \right\} \quad (2)$$

式中 $R^2 = r^2 + z^2$ ， $k^2 = 4r\rho/(R^2 + \rho^2 + 2r\rho)$ ， $\alpha^2 = 4r\rho/(\rho + r)^2$ ， $K(k)$ ， $E(k)$ 和 $\Pi(\alpha^2, k)$ 分别是第三类完全椭圆积分：

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (3)$$

$$\Pi(\alpha^2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1-\alpha^2 \sin^2 \varphi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4)$$

对上式进行微分，得到在 x, y, z 方向单位质量受到的引力：

$$F_x = -\frac{4G\sigma x\sqrt{\rho}}{kr^{3/2}} \left[\left(1 - \frac{1}{2}k^2\right)K(k) - E(k) \right] \quad (5)$$

$$F_y = -\frac{4G\sigma y\sqrt{\rho}}{kr^{3/2}} \left[\left(1 - \frac{1}{2}k^2\right)K(k) - E(k) \right] \quad (6)$$

$$F_z = \frac{2G\sigma z}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + 2r\rho}} K(k) - G\sigma\pi \operatorname{sign}(z) \left[1 + \operatorname{sign}(\rho - r)(1 - \Lambda_0(\phi, k)) \right] \quad (7)$$

$\Lambda_0(\phi, k)$ 是 Heuman's Lambda 函数。在 $z = 0$ 的平面上 $R = r$, $k^2 = 4r\rho/(r + \rho)^2$, 得

$$V(r) = -2G\sigma(r + \rho)E(k) - (\rho - r)K(k) \quad (8)$$

$$F_r = -\sqrt{F_x^2 + F_y^2} = -\frac{4G\sigma\rho}{kr} \left[\left(1 - \frac{1}{2}k^2\right)K(k) - E(k) \right] \quad (9)$$

在边界点上 $r = \rho$, $k = 1$, 得：

$$V(r) = -4G\sigma\rho K(1) \quad (10)$$

$$F_r = 4G\sigma \left[\frac{1}{2}K(1) - E(1) \right] \quad (11)$$

按 (3) 式有：

$$K(1) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \rightarrow \infty \quad E(1) = 1 \quad (12)$$

在边界点上引力势和引力都是无穷大，这个结果至今没有被注意。由于涉及椭圆函数，半径有限均匀盘引力场的直观形式至今不清楚。虽然我们可以按照 (9) 式画出曲线，至今没有人将它们画出来。如果半径有限圆盘内物质不均匀，则更是没有办法画出引力场的旋转曲线。本文的目的就是通过计算机数值计算，找到一般性的方法来处理半径有限圆盘的引力场问题。

2.2 半径有限密度均匀薄圆盘引力场的数值计算

假设厚度不计的薄圆盘半径为 R ，物质均匀分布薄圆盘面密度 σ_0 为常数。如图 1 所示，圆盘内任意点上面积元 $dxdy$ 的质量对盘内 x_0 点上单位质量的引力为：

$$d\bar{F}(x_0) = -\frac{G\sigma_0 dxdy \bar{r}}{r^3} \quad r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2} \quad (13)$$

从对称性考虑，沿 y 轴方向的引力分量相互抵消，沿 x 轴方向的引力分量为：

$$dF(x_0) = -\frac{G\sigma_0 \cos\theta dx dy}{r^2} \quad \cos\theta = \frac{x_0 - x}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2}} \quad (14)$$

整个薄圆盘质量对 x_0 点单位质量的引力就为：

$$F(x_0) = -\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{G\sigma_0(x_0-x)dy}{((x_0-x)^2 + y^2)^{3/2}} = -\int_{-R}^R \frac{2G\sigma_0\sqrt{R^2-x^2} dx}{(x_0-x)\sqrt{R^2+x_0^2-2x_0x}} \quad (15)$$

当 $x_0 > R$ 时有 $x_0 - x > 0$ ，容易证明此时有 $R^2 + x_0^2 - 2x_0x > 0$ 。因此在 $x_0 > R$ 圆盘外区间，上式中被积函数是正常的。但在 $x_0 \leq R$ 的盘内 $x = x_0$ 点上被积函数无穷大，与 (12) 式的结果是一致的。

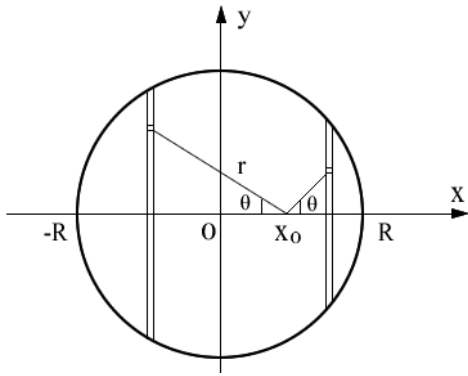


图 1. 密度均匀半径有限薄圆盘引力场

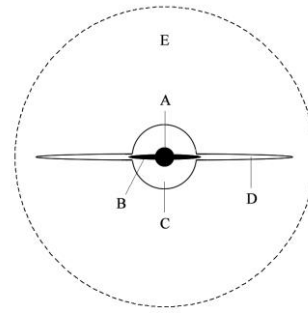


图 2. 漩涡星系结构图

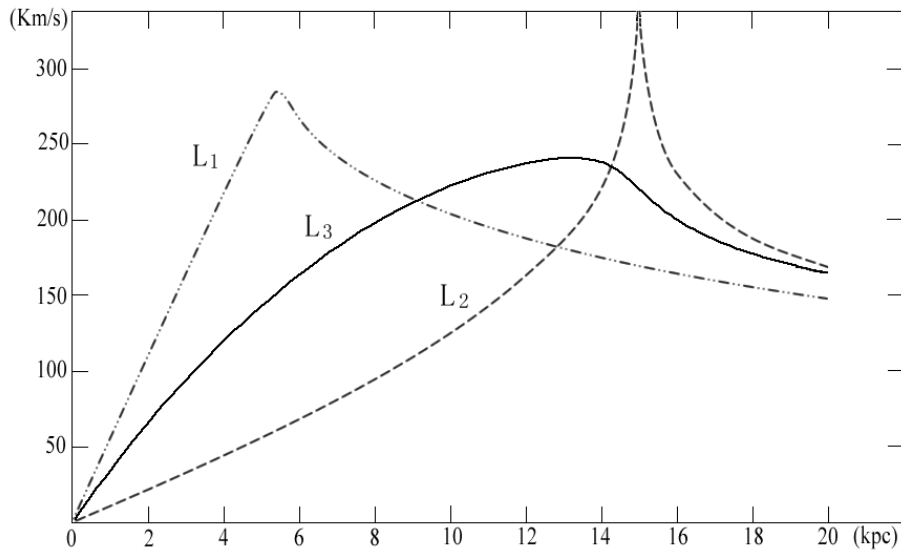


图 3 L_1 是质量球对称均匀分布的旋转曲线

L_2 是半径有限密度均匀分布薄圆盘的旋转曲线

L_3 是半径有限密度线性递减薄圆盘的旋转曲线

设星系盘半径 $R = 15 \text{ kpc}$ ，厚度 $h = 0.6 \text{ kpc}$ ，质量 $M = 2 \times 10^{41} \text{ kg}$ ，体密度 $\rho = 7.85 \times 10^{-21} \text{ kg/m}^3$ 。若将它看成薄圆盘，面密度 $\sigma = 0.30 \text{ kg/m}^2$ 。利用计算机数值方法对 (15) 式进行计算，再考虑速

度与力的关系 $V = \sqrt{x_0 F}$ ，得到图 3 的旋转曲线 L_2 。结果表明，薄圆盘的引力和旋转速度都随圆盘半径 x_0 的增大而增大，且在盘边缘 $x_0 = 15kpc$ 处达到极大，与 (12) 式的结果一致。原则上这个峰值应当是无穷大，但由于数值计算采用的步长不可能无穷小，得到的峰值实际上不会无穷大。

若将同样的质量看成球对称分布，密度也为 $\rho = 7.85 \times 10^{-21} kg/m^3$ ，球的半径则为 $5.37kpc$ 。按 (1) 式计算旋转曲线，得到图 3 中的 L_1 曲线。可知质量和体密度相同时，曲线 L_2 与 L_1 有很大的差别。 L_2 的峰值点比 L_1 的峰值点明显右移，盘外区域的旋转速度也比球状分布的旋转速度大。

为了消除边界上的无穷大，令盘面质量密度线性递减，在盘边界上密度为零，即：

$$\sigma(r) = \sigma_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) = \sigma_0 \left(1 - 0.0667\sqrt{(x^2 + y^2)}\right) \quad (16)$$

对于 $M = 2 \times 10^{41} kg$ 的圆盘，相当于取 $\sigma_0 = 0.890 kg/m^2$ 。在 (15) 式中用 $\sigma(r)$ 代替 σ_0 ，用数值方法计算得到 L_3 曲线。在 $x_0 = 15kpc$ 的边界点上无穷大消失，曲线变得光滑，在边界内仍然向上弯曲。

三 半径无限密度指数衰减薄圆盘引力场的旋转曲线

半径无限薄盘质量面密度分布指数衰减时，引力场有解析解。因此现有天体力学中较精确的方法是，将漩涡星系看成边界无限的薄圆盘，求出盘的引力势，然后通过微分计算求引力。令：

$$\sigma(r) = \sigma_0 e^{-r/R_d} = \sigma_0 e^{-\alpha r} \quad (17)$$

式中参数 $\alpha = 1/R_d$ ， R_d 是盘的长度标度。在 $z=0$ 时按椭圆函数计算方法，可得【6】：

$$V^2(r) = 4\pi G \sigma_0 R_d y^2 \left[I_0(y)K_0(y) - I_1(y)K_1(y) \right] \quad (18)$$

式中 $y = r/2R_d = \alpha r/2$ ， $I_0(y)$ 和 $I_1(y)$ 为第一类修正的贝赛尔函数， $K_0(y)$ 和 $K_1(y)$ 为第二类修正的贝赛尔函数。

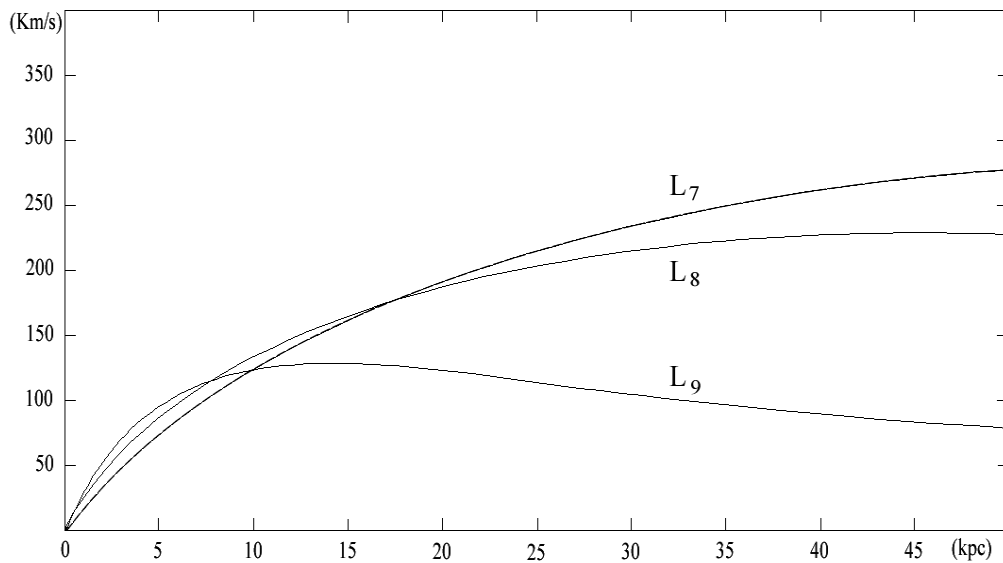


图 4. 半径无限密度指数衰减系数分别为 $\alpha = 0.03, 0.05, 0.15$ 时薄圆盘的旋转曲线

然而实际情况并不都是这样简单，半径无限薄盘旋转曲线的形状与面密度指数衰减因子的大小密切相关。在(17)式中令 $\sigma_0 = 0.3\text{Kg}/\text{m}^2$ ，取 $\alpha = 0.03$ ($R_d = 33.33$)， $\alpha = 0.05$ ($R_d = 20$)和 $\alpha = 0.15$ ($R_d = 6.67$)，通过计算机数值计算，分别得到图4中的曲线 L_7 ， L_8 和 L_9 。在 50kpc 的范围内，曲线 L_7 的后部是向上弯曲的， L_8 的后部是平坦的，曲线 L_9 的后部则是向下弯曲的。可见衰减参数 α 的大小对曲线的形状起关键作用， α 较小时曲线后部向上弯， α 较大时曲线后部向下弯。因此选择小的衰减参数，实际上也可以用(18)式来描述漩涡星系平坦或向上弯曲的旋转曲线。

问题是采用半径无限薄圆盘加上人为截断的方法，如果用较小的衰减参数，得到较平坦或者向上弯曲的旋转曲线，就会使半径以外的空间存在太多的质量，导致太大的误差，使这种计算方法变得不适用。真正合适的方法是，采用计算机数值方法，直接计算半径有限质量薄盘状均匀分布的引力场。以下证明采用这种精确的计算方法，就不需要漩涡星系中存在大量非重子暗物质的假设。

四 半径有限密度指数衰减薄圆盘引力场的旋转曲线

设薄圆盘的半径 $R = 15\text{kpc}$ ，在(17)式中取 $\sigma_0 = 1.5\text{Kg}/\text{m}^2$ ， $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3$ 。通过数值计算，得图5的 L_{10} ， L_{12} 和 L_{14} 三条旋转曲线。它们在边界点内的后部分别向上弯，平坦和向下弯，在边界点上都有一个峰值。取相同的面密度和指数衰减参数，按(18)式计算半径无限的薄圆盘的旋转速度，得到图5的 L_{11} ， L_{13} 和 L_{15} 三条曲线。其中 L_{10} 和 L_{11} 的衰减参数 $\alpha = 0.1$ ，无论在盘内还是盘外区间，它们的形状相差很大。 L_{12} 和 L_{13} 的衰减参数 $\alpha = 0.2$ ，二者的形状不太一样，但差别变小。在圆盘内靠近边界处 L_{12} 是平坦的，但 L_{13} 却是向下弯曲的。 L_{14} 和 L_{15} 的衰减参数 $\alpha = 0.3$ ，除了在边界点附近外，二者的形状基本是一致的。

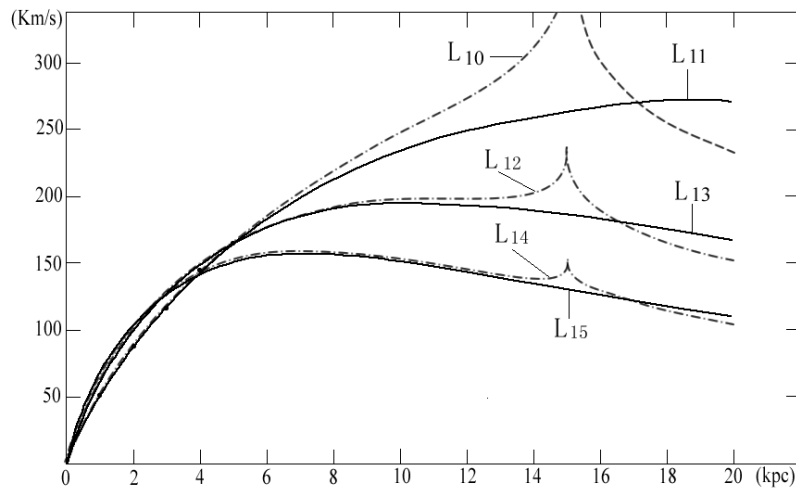


图5. L_{10} ， L_{12} 和 L_{14} 是半径有限密度指数衰减系数 $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3$ 时薄圆盘的旋转曲线
 L_{11} ， L_{13} 和 L_{15} 是半径无限密度指数衰减系数 $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3$ 时薄圆盘的旋转曲线

从图5可见，旋转曲线的形状对指数衰减参数的值比较敏感。在的圆盘边界 15kpc 以内的区域， $\alpha = 0.1 \sim 0.3$ 的微小差别会造成旋转曲线形状较大的差别。以下以银河系为例进行讨论，同时用两种方法计算银河系的旋转曲线和质量并进行比较，最后讨论暗物质问题。

五 银河系的旋转曲线与暗物质

5.1 银河系的结构与质量分布

漩涡星系的星体分布具有扁平的盘状结构。如图 2 所示，A 是星系核，B 发光盘，C 是星系核外围球状分布的晕状物质。C 区域包括发光的星系团和气体，其密度大大低于发光盘，半径比发光盘半径稍小。通过微引力透镜方法，天文学家发现 C 区域存在被称为晕族大质量致密天体(MACHO)的暗物质，其中包括褐矮星，自由漂浮行星和死亡的恒星。但它们的总质量大约只占银晕物质的 7% (P. Tisserand, et al. 2006)【7】。由于这些晕状物质是球状分布的，在以后的讨论中，我们都将把这些物质包括到星系核中，不再单独考虑它们物质对漩涡曲线的影响。

D 发光盘的平面延伸区域，目前已在该区域发现大量的中性氢气体云，半径已延伸到几十 kpc，边界在何处仍未知。根据报道，这种氢气云 90% 都分布在星系发光盘的延伸平面上【8】。天文学家正是通过测量该区域氢气云射电波段 21 厘米中性氢发射谱线的多普勒频移，发现离漩涡星系中心足够远的地方，气体仍然绕星系中心高速旋转，其旋转曲线是平坦的。此外，在 D 区域还发现大量的氢分子云。只是由于这些氢分子云的温度极低，与宇宙背景辐射的温度差不多，几乎不辐射电磁波，以至于现有的观察手段无法探测到它们的存在。

漩涡星系的标度长度 R_d 是通过测量发光物质的光度来确定的，因此 R_d 只代表发光物质密度的指数衰减方式。然而一般漩涡星系中发光物质和不发光物质是混在一起的。尤其对于发光盘外的区域，难以通过直接观测来区分正常重子物质与暗物质的密度。银河系发光盘外的气体云被认为也是以指数衰减方式分布的【7】。因此本文将银河系盘面上的物质分布统一用下式表示：

$$\sigma(r) = \sigma_0 e^{-\alpha r} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^N \right] \quad (19)$$

式中因子 $1 - (r/R)^N$ 用来消除盘边界点上旋转曲线的尖锐峰。N 取值足够大时 $1 - (r/R)^N$ 是一条高度近似等于 1 的直线，上式就能近似代表表面密度为 $\sigma(r) = f(r)$ 的物质盘密度。图 7 是 $N=1, 5, 10$ ，时函数 $1 - (r/R)^N$ 的曲线，结果显示取 $N=10$ 时可以认为是足够精确的了。

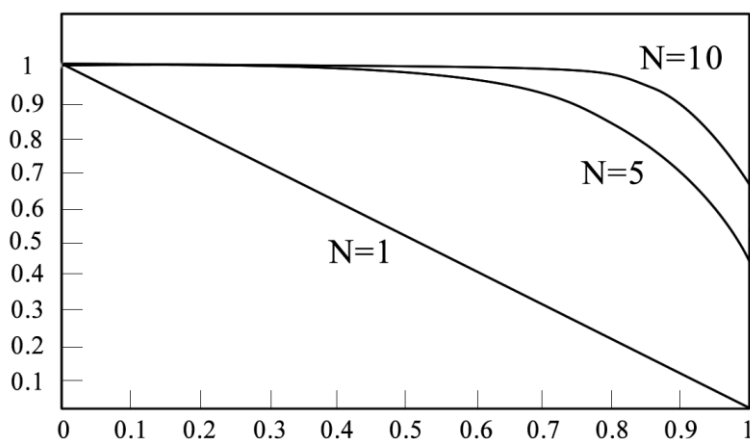


图 6. 消除盘边界点上旋转曲线尖锐峰的参数选择

对于半径无限盘计算方法，取截断半径 $R = 50kpc$ 。对于半径有限盘，取银河系半径 $R = 50kpc$ 。按照 (23) 和 (24) 式，银河系盘状分布质量的计算公式为：

$$M_b = \int_0^R 2\pi\sigma_0 e^{-\alpha r} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{10} \right] r dr = \frac{2\pi\sigma_0}{\alpha} \left\{ - \left(r + \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha r} + \frac{1}{R^{10}} \left(r^{11} + \frac{11}{\alpha} r^{10} + \frac{11 \times 10}{\alpha^2} r^9 + \dots + \frac{11 \times 10 \times \dots \times 2}{\alpha^{10}} r + \frac{11!}{\alpha^{11}} \right) e^{-\alpha r} \right\} \Bigg|_0^R \quad (20)$$

在上式中取 $R=15kpc$ ，就得到银河系发光盘的质量，其中包括发光物质和不发光物质。取 $R=50kpc$ 计算，减去 $R=15kpc$ 的发光盘内物质质量，剩余的就是发光盘外暗物质的质量。

5.2 半径有限盘的数值计算结果

设银河系盘的实际范围伸展到 $R=50kpc$ 的地方，实际观察的旋转曲线由图 7 的 L_{16} 表示(Eric Chaison and Steve Mcmilan, 1999) 【9】。取 $\alpha=0.06$ ($R_d=16.67$) 和 $\sigma_0=0.85Kg/m^2$ ，其中包含星系盘上所有的发光物质和暗物质。银河系半径取 $R=50kpc$ ，通过半径有限盘数值计算方法，得到图 7 的 L_{17} 曲线。

假设银河系核半径为 $5kpc$ 的球体内共包含 $6.70 \times 10^{40}kg$ 的物质。其中半径 $0 \sim 1kpc$ 的范围内包含 $M_h = 2.8 \times 10^{40}kg$ 物质，半径 $1 \sim 2kpc$ 的范围内包含 $2 \times 10^{40}kg$ 物质，半径 $2 \sim 3kpc$ 的范围内包含 $0.9 \times 10^{40}kg$ 物质，半径 $3 \sim 4kpc$ 的范围内包含 $0.6 \times 10^{40}kg$ 物质，半径 $4 \sim 5kpc$ 的范围内包含 $0.4 \times 10^{40}kg$ 物质。由此得到图 7 中星系核质量的旋转曲线 L_{19} 。核物质加上盘物质，就得到图 7 的旋转曲线 L_{20} ，与实际观测的旋转曲线 L_{16} 基本一致。

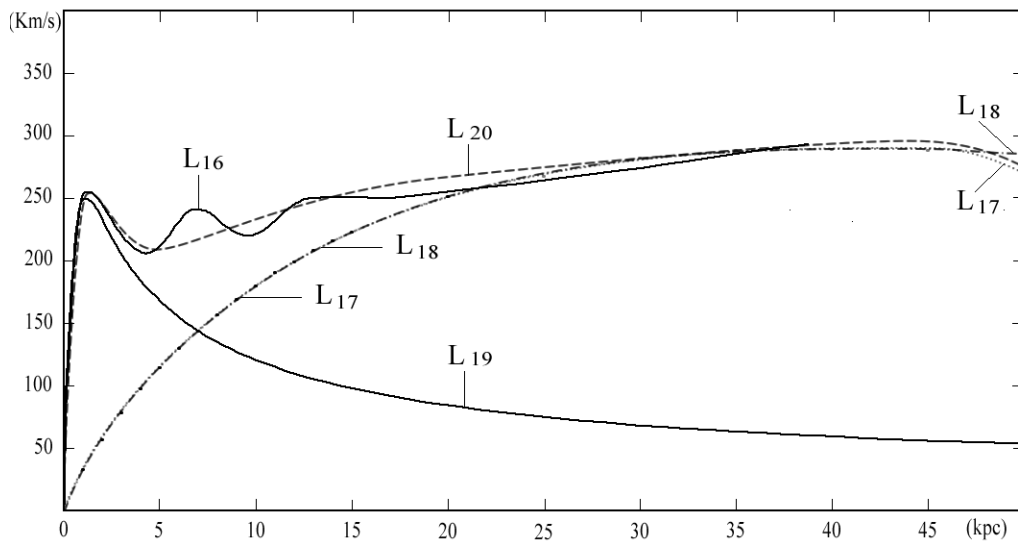


图 7. L_{16} 是银河系实际观测到的旋转曲线

L_{17} 是按盘半径有限方法计算的银河系星系盘的旋转曲线

L_{18} 是按盘半径无限方法计算的银河系星系盘的旋转曲线

L_{19} 是银河系星系核的旋转曲线

L_{20} 是按盘半径有限方法计算银河系总的旋转曲线

按 (20) 式计算，银河系半径 $R=50kpc$ 的盘内物质的总质量 $10.62 \times 10^{41}Kg$ 。加上星系核质量 $6.70 \times 10^{40}kg$ ，银河系的总质量是 $11.29 \times 10^{41}Kg$ 。在 (20) 式中取 $R=15kpc$ ，得到发光盘内物质的质量为 $3.10 \times 10^{41}Kg$ 。加上星系核质量 $6.7 \times 10^{40}Kg$ ，银河系发光盘内物质的总质量是

$3.77 \times 10^{41} \text{ Kg}$ ，其中包含了发光物质和不发光的暗物质。

按通常的看法，发光盘内不发光的暗物质占十分之一，质量约为 $3.8 \times 10^{40} \text{ Kg}$ ，发光恒星的质量为 $3.39 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。如果按 Isabelle A.Grenier 等的估计 (Isabelle A.Grenier, Jean-Mac Casandjian, 2005)

【10】，发光盘中不发光的暗物质占二分之一，发光恒星质量为 $1.9 \times 10^{41} \text{ Kg}$ ，不发光的暗物质的质量为 $1.9 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。

如果银河系中发光恒星的质量为 $3.39 \times 10^{41} \text{ Kg}$ ，不发光暗物质的质量则为 $7.90 \times 10^{41} \text{ Kg}$ ，暗物质是发光恒星质量的 2.33 倍。如果发光恒星的质量为 $1.9 \times 10^{41} \text{ Kg}$ ，不发光暗物质的质量为 $9.39 \times 10^{41} \text{ Kg}$ ，暗物质是发光恒星质量的 4.94 倍。可以认为这种数量的暗物质是重子暗物质，银河系中就不需要非重子暗物质的假设。

5.3 半径无限盘加截断的数值计算结果

假设银河系的暗物质都是盘状分布，我们用现有的边界无限加截断方法来计算。同样令银河系盘密度 $\sigma_0 = 0.85 \text{ Kg/m}^2$ ，取 $\alpha = 0.054$ ($R_d = 18.52 \text{ kpc}$)，按 (18) 式计算，得到图 7 的曲线 L_{18} 。它与曲线 L_{17} 基本吻合，只是在边界上 L_{18} 比 L_{17} 稍高一点。加上星系核质量，得到的曲线也与 L_{20} 基本一致，但靠边界部分的尾部比较平坦，在图 7 中就不标出。

按 (20) 式计算， L_{18} 曲线描述的盘在截断边界 $R = 50 \text{ kpc}$ 内的质量是 $13.06 \times 10^{41} \text{ Kg}$ ，比边界有限方法计算多出 $2.46 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。加上星系核质量 $6.7 \times 10^{40} \text{ Kg}$ ，在半径 $R = 50 \text{ kpc}$ 之内银河系的总质量是 $13.77 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。若在 (20) 式中取发光盘半径 $R = 15 \text{ kpc}$ ，得到发光盘的质量为 $3.48 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。加上星系核质量，银河系发光盘内物质总的质量是 $4.15 \times 10^{41} \text{ Kg}$ ，其中包括发光物质和暗物质。即使认为其中的一半是发光恒星，质量为 $2.08 \times 10^{41} \text{ Kg}$ ，暗物质的质量是发光恒星的 6.62 倍，仍然可以认为是重子暗物质。

然而由于此时是无限盘， $13.06 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 并不是星系盘的总质量，在 $R > 50 \text{ kpc}$ 的区域还可能存在大量的质量。在 (20) 式中令 $R \rightarrow \infty$ ，得到整个无限盘的质量 $17.39 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。因此在截断半径 $R = 50 \text{ kpc}$ 以外还存在 $4.33 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 的物质，是截断半径内盘面质量的 33.2%。也就是说按照半径无限加截断的方法计算，为了得到平坦的旋转曲线，盘截断半径外还有大约三分之一的物质被忽略。

这样的误差显然太大，为了减少误差，我们就需要采用更大的指数衰减参数，以保证在截断半径以外区域中的质量足够小。然而如果采用更大的衰减参数，得到的旋转曲线必然向下弯曲，就无法解释银河系平坦的旋转曲线。因此就必须引入大量球对称分布的暗物质晕，这也是目前的理论需要假设旋涡星系中存在大量晕状分布的非重子暗物质的根本原因。

5.3 半径无限盘加截断有暗物质晕的计算结果

我们来讨论所需要的，银河系暗物质晕的质量。为了得到合适的旋转曲线，银河系的质量分布与图 7 必须有所不同。假定银河系发光恒星的质量 $M = 2 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。其中的 1/5 位于星系核内，质量为 $0.4 \times 10^{41} \text{ Kg}$ ，剩余的为盘状分布，质量为 $1.6 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。

银河系发光盘的标度长度是不确定的，根据实际观察可取 $R_d = 3 \text{ kpc} \sim 6 \text{ kpc}$ (Pennny D. Sackett, 1997)。取 $R_d = 4 \text{ kpc}$ 或 $\alpha = 0.25$ ，同时取 $\sigma_0 = 1.84 \text{ Kg/m}^2$ 。采用以上参数按无限盘的方法做数值计算，得到图 8 的旋转曲线 L_{17} 。截断半径取 $R = 15 \text{ kpc}$ 时，按 (20) 式计算，发光盘内物质的质量正好为 $1.60 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。在 (20) 式中令 $R \rightarrow \infty$ ，得到整个盘的质量 $1.77 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。它与发光内的质量差为 $0.17 \times 10^{41} \text{ Kg}$ ，可以将它看成星系盘重子暗物质的质量。由于它只有发光盘内物质质量的十分之一，可以忽略不计。

假设球核质量为 $4 \times 10^{40} \text{ kg}$ ，在半径 $0 \sim 1 \text{ kpc}$ 的范围内包含 $2.6 \times 10^{40} \text{ kg}$ 物质，半径 $1 \sim 2 \text{ kpc}$ 的范围内包含 $0.5 \times 10^{40} \text{ kg}$ 物质，半径 $2 \sim 3 \text{ kpc}$ 的范围内包含 $0.4 \times 10^{40} \text{ kg}$ 物质，半径 $3 \sim 4 \text{ kpc}$ 的范围内包含 $0.3 \times 10^{40} \text{ kg}$ 物质，半径 $4 \sim 5 \text{ kpc}$ 的范围内包含 $0.2 \times 10^{40} \text{ kg}$ 物质。按照这种分布，可得球核质量对应的旋转曲线是图 8 的 L_{18} 。

星系盘质量加上星系核质量后，旋转曲线为图 8 的 L_{19} 。该曲线在半径 $r < 10 \text{ kpc}$ 的前部与实际观察曲线基本一致，在 $r > 10 \text{ kpc}$ 的后部曲线严重向下弯曲。因此必须引入星系盘外球状分布的暗物质，来提高后部的旋转速度。假设暗物质密度也是指数衰减函数，质量按下式计算：

$$M_d = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = 4\pi \int_0^R \rho_0 e^{-\beta r} r^2 dr$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{\beta} \left[\frac{2}{\beta^2} - \left(R^2 + \frac{2R}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} \right) e^{-\beta R} \right] \quad (26)$$

取 $\rho_0 = 7.35 \times 10^{-22} \text{ Kg/m}^2$ 和 $\beta = 0.05 / \text{kpc}$ ， $R = 50 \text{ kpc}$ ，计算得到 $M_d = 18.90 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。如图 8 的 L_{20} 所示，暗物质导致的旋转曲线在 $R = 50 \text{ kpc}$ 处的速度是 $V_d = 2.86 \times 10^5 \text{ m/s}$ 。设银河系盘质量引起的旋转速度为 V_b ，星系核质量引起的旋转速度为 V_h ，星系盘外晕状暗物质引起的旋转速度为 V_d ，按公式 $V^2 = V_h^2 + V_b^2 + V_d^2$ 计算，得到图 8 的旋转曲线 L_{21} ，与实际观察的 L_{16} 基本一致。

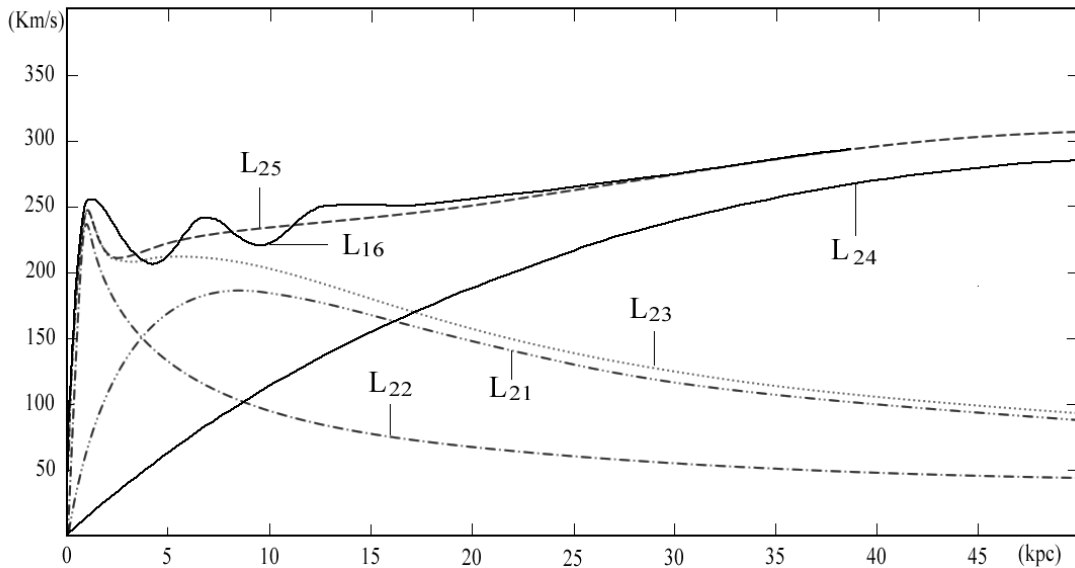


图 8 L_{16} 是银河系实际观测到的旋转曲线

L_{21} 是 $\alpha = 0.25$ 时按半径无限加截断方法计算的银河星系盘物质的旋转曲线

L_{22} 是星系核物质的旋转曲线

L_{23} 是星系盘加上星系核物质的旋转曲线

L_{24} 是球状分布暗物质晕的旋转曲线

L_{25} 是半径无限加截断方法并考虑暗物质晕后银河系总的旋转曲线

一般认为暗物质晕的范围比发光盘半径大得多。按 (26) 式的指数衰减方式，如果取暗物质晕的截断半径为 $R = 120 \text{ kpc}$ ，得 $M_d = 38.90 \times 10^{41} \text{ Kg}$ ，旋转曲线的速度是 $V_d = 2.65 \times 10^5 \text{ m/s}$ 。如果在

(26) 式中令 $R \rightarrow \infty$, 得 $M_d = 41.50 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。因此在 $R = 120 \text{ kpc}$ 的截断半径外, 暗物质晕的质量为 $2.60 \times 10^{41} \text{ Kg}$, 是截断半径内质量的 6.27%, 这样的误差是可以接受的。

如果不考虑星系核和星系盘中的暗物质, 银河系发光物质的总质量为 $2 \times 10^{41} \text{ Kg}$, 截断半径 $R = 120 \text{ kpc}$ 内银河系的总质量就为 $40.90 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。其中暗物质晕的质量 $M_d = 38.90 \times 10^{41} \text{ Kg}$, 是发光物质质量的 19 倍。然而按照星系质光比的测量, 不发光的暗物质与发光物质的比值大约是 10 比 1。因此目前一般认为, 如此大量的暗物质不可能都是重子物质, 其中大部分是非重子物质。

六 非重子暗物质问题的讨论

6.1 漩涡星系中的非重子暗物质

由于数学上的复杂性, 目前对边界有限的物质盘状分布的引力场缺乏直观的了解。天体物理学中计算漩涡星系引力场时, 一般都采用边界无限盘密度指数衰减加截断的计算方法。本文证明采用这种方法, 为了得到平坦的旋转曲线就必须使用较小的指数衰减参数, 由此就会在截断半径外产生较大的质量误差。为了减少误差, 则必须使用较大的衰减参数, 结果导致旋转曲线尾部下降。为了提高旋转曲线, 就不得引入大质量的球状分布暗物质晕。然而在漩涡星系中, 我们至今未能观察到这种非重子晕状暗物质。

本文提出半径有限盘精确的计算机数值计算方法, 用于边界有限物质盘状分布引力场和旋转曲线的计算。采用这种方法, 边界有限物质盘状均匀分布引力场的旋转曲线是向上弯曲的, 并在边界上达到极大。对于物质密度指数衰减的情况, 选择较小的衰减参数, 可以使旋转曲线平坦或者向上弯曲。由于边界以外没有质量, 这种计算方法不存在质量误差的问题。

按照本文的方法计算, 银河系总质量为 $11.29 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。其中发光物质质量为 $1.90 \sim 3.77 \times 10^{41} \text{ Kg}$, 重子暗物质质量为 $7.52 \sim 9.39 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。采用现有的半径无限盘加半径截断方法, 需要考虑非重子暗物质晕, 银河系的总质量为 $40.90 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。其中发光物质质量是 $2 \times 10^{41} \text{ Kg}$, 重子与非重子暗物质的质量是 $38.90 \times 10^{41} \text{ Kg}$ 。其总质量按是现有理论计算方法的 27.6%, 描述同样的旋转曲线, 所需的质量大大减少。

因此采用本文的计算机数值方法, 只要假设盘状分布暗物质的质量不多于发光物质质量的五倍, 就能很好解释银河系半径为 50 kpc 范围内旋转曲线的平坦性。我们即不需要修改牛顿引力理论, 也不需要漩涡星系中存在大量非重子暗物质晕的假设, 虽然也不排除它们的存在。

6.2 宇宙学和星系团中的非重子暗物质

前文已证明, 直接采用多普勒红移公式和修正的牛顿引力理论, 就不需要宇宙中存在 70% 暗能量和 26% 的非重子暗物质的假设。上节证明漩涡星系也不需要大量非重子暗物质的假设, 剩下来需要讨论的是星系团中的非重子暗物质。

暗物质首先是由 Zwicky 在后发星系团中发现的, 他用维里平衡理论计算星系团的质量后, 得出的后发星系团的质光比达 $300 \sim 400$, 比一般星系可能有的质光比大得多。由此推断出后发星系团中除成员星系之外, 还有大量不发光物质存在。

中国科学院北京天文台的郑怡嘉先生认为, 后发星系团中高质光比可以用发光效率极低的高温电离气体来解释, 以下观点摘自郑怡嘉新浪博客:

1. 对质光比约为 50~100 的椭圆星系，几乎还没有天文学家论证其中存在暗物质，因为椭圆星系没有像旋涡星系那样可以用来论证暗物质存在的旋转曲线。椭圆星系的质光比虽然比旋涡星系的质光大，但这个事实却无法用来有效地证明椭圆星系中一定含有暗物质。大质光比完全可以用椭圆星系中的恒星比旋涡星系中的恒星有大得多的质光比来解释。

2. 根据天文观测，星系间存在大量发光能力很低的高温电离气体。后发星系团中心部分主要的成员星系都是椭圆星系，旋涡星系存在于星系团的外围。在星系团中心部分的星系际空间中，弥散的高温电离气体的密度要比星系团的外围部分大得多。在引力和气体压力的作用下，椭圆星系内部恒星际空间中高温电离气体密度显然比旋涡星系内部恒星际空间中的高温电离气体密度也要大得多。

3. 根据 Fabbiano 1990 年的统计，椭圆星系的 X 射线光度要比旋涡星系的 X 射线光度高 100 倍左右。这个事实说明在椭圆星系内部恒星际空间中，高温电离气体含量显然要比旋涡星系内部恒星际空间中的高温电离气体含量要大得多。由于星系的恒星际空间中的高温电离气体含量是构成星系总体质量的重要部分，因此有更多高温电离气体含量的椭圆星系的质光比要比旋涡星系的质光大。后发星系团的质光比要比椭圆星系还要大得多，也是这个道理。

实际天文观测表明，椭圆星系中衰老中的恒星比较多，颜色比旋涡星系红，是红巨星的光谱特征；而旋涡星系的成员恒星年轻的恒星比较多。不同类型的恒星，它们的光度变化范围几乎可以大到 10 个量级。质量的变化范围虽然比光度变化范围小一些，但也可以有几个量级。由于恒星的质量和光度存在有某种联系，因此质量和光度之比的变化范围要小得多，但 1~2 量级的变化还是可能。因此无法用椭圆星系的质光比大于旋涡星系来论证暗物质的存在。

根据 2007 年 11 月 30 日《科学》杂志的报道，猎户座星云充满大量温度超过百万度高温气体，并指出这意味着此现象在星系中很普遍。1999 年欧洲空间局发射一颗 X 射线天文卫星——XMM-牛顿卫星 (X-ray Multi-Mirror Newton)。2009 年 5 月报道，牛顿 X 射线卫星在宇宙空间中发现大量由普通物质构成的高温稀薄气体，其总量甚至比之前已观测到的普通物质总量还要多。而且它们的温度高达 100 万度左右，完全是处于电离状态，存在这种炽热气体的迹象其实早已经在附近的星系团中发现。如果用发光效率极低的高温电离气体代替神秘的暗物质概念，椭圆星系和旋涡星系的质光比差别问题就容易解释得多。按照这种解释，也就没有必要假设星系团中存在非重子暗物质。

在本问题的研究过程中，我们建立了漩涡星系旋转曲线自动计算的软件系统 (WRCS)，可以同时用于边界有限和半径无限情况下，漩涡星系物质盘状分布旋转曲线的计算。通过输入相关参数，该系统能直接显示各种旋转曲线的图像并提供相关数据。我们乐意将这套系统与其他研究者共享，需要者可以通过电子邮箱 mxc001@163.com 或 yupingpingyu@yahoo.com 索取。

作者衷心感谢上海天文台沈世银研究员非常有价值的讨论，感谢福州原创物理研究所卢庆华、安榕芝先生对本文计算所做的大量认真细致的工作。

参考文献

1. Roberts M. Rots A II., *Astron. Astrophys.* 1973, 26, p. 383. Ostriker J. P. Peebles P. J. E. Yahil A., *Astrophys. J.* 1974, 193:1. F. Zwicky, On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae, *The Astrophysical Journal*, 1937, 86, 3 p. 217-246.
2. 詹姆斯·宾尼，斯科特·特里梅因著，宋国玄译，*星系动力学*，上海科学技术出版社，2005，p. 54, 242, 421.

3. Milgrom M, *The Astrophysical Journal*, 1983, 270: 365; 1984, 287:571; 1984, 302: 617; Dynamics with a non-standard inertia-acceleration relation: an alternative to dark matter, *Ann. Phys.*, 1994, 229, p. 384-426.
4. Krogh, F.T., Ng, E.W., Snyder, W.V., (1982), *Celest. Mech.* 26, 395, Lass, H., Blitzler, L., (1983), *Celest. Mech.* 30, 225. Fukushima, T., *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2010, 108, p. 339.
5. P. Tisserand, et al. 2006.
6. Peter M. W. Kalberla, et al., The HI Distribution, of the Milky Way, *Annu. Rev. Astrophys.* 2009, 47: 27-61.
70. Eric Chaisson, Steve McMillan, *Astronomy Today*, Forth Edition, Alan Still Texas Tech University, Prentice Hall Inc, 1999.
8. Isabelle A.Grenier, Jean-Mac Casandjian, et al., Unveiling Extensive Clouds of Dark Gas in the Solar Neighborhood, *Science*, 2005, Vol. 307, No. 5713, p. 1292-1295, doi: 10.1126/ science.1106924.
9. Eric Chaisson, Steve McMillan, *Astronomy Today*, Forth Edition, Alan Still Texas Tech University, Prentice Hall Inc, 1999.
10. 6. Walter Dehnen, James Binney, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1998, Volume 294, Issue 3, pages 429–438.